Das Stochastik Script - IUS Oberstufe

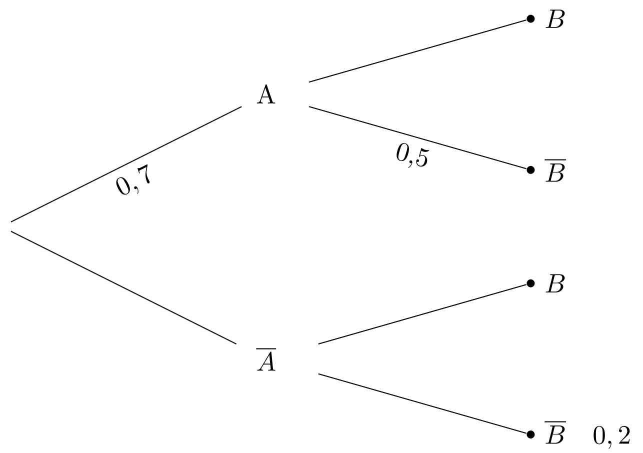
Daniel Roth

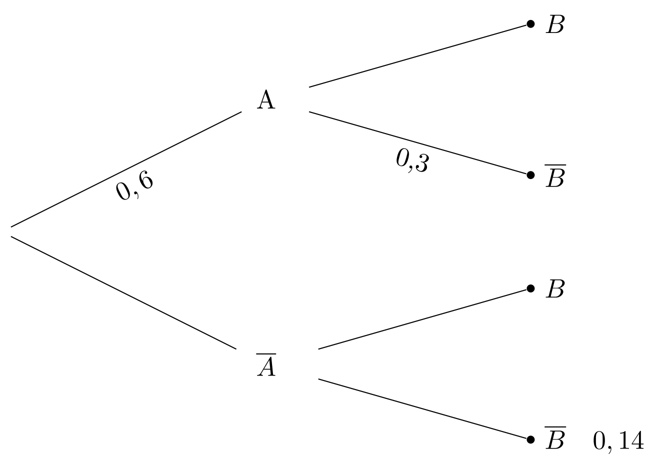
November 27, 2023

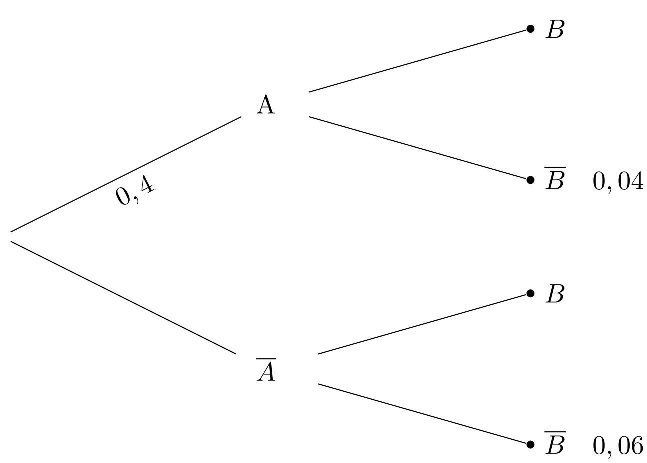
Mathematics is beautiful, Philosophy is ugly

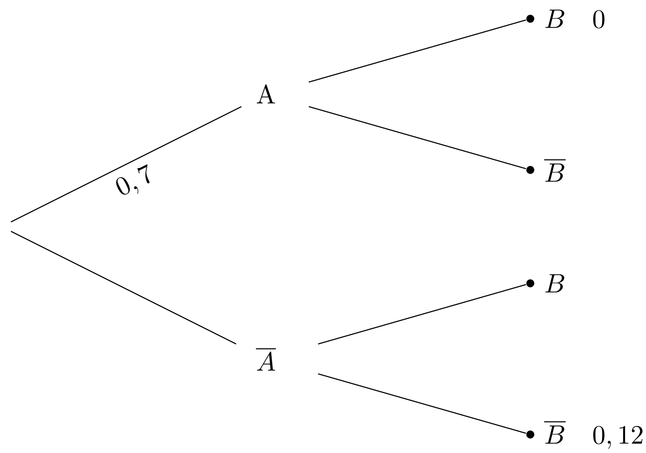
1 Baumdiagramme

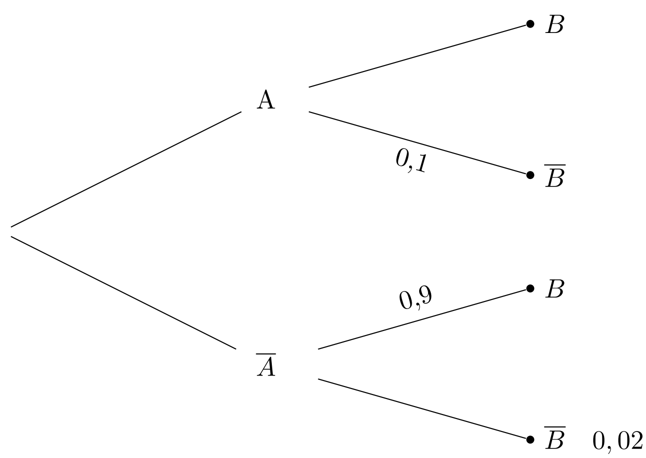
Aufgabe 1. *Fülle das Baumdigramm vollständig aus. Gib dann die Wahrscheinlichkeiten* $P(B)$, $P(A \cup B)$ *an und gib an, ob die Ereignisse* A, B *stochastisch unabhängig sind.*

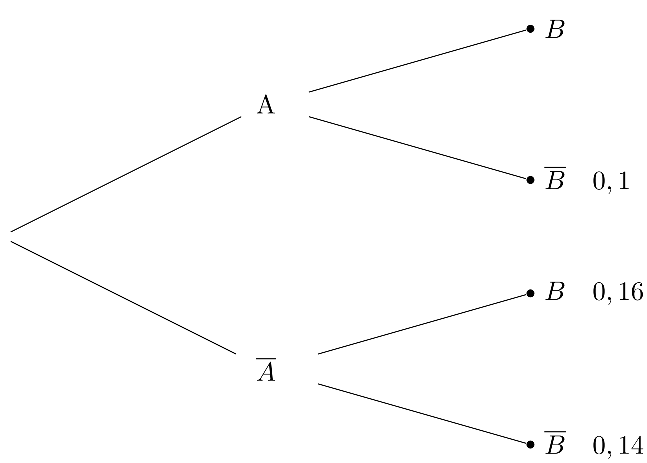

A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
0,7
0,5
0,2

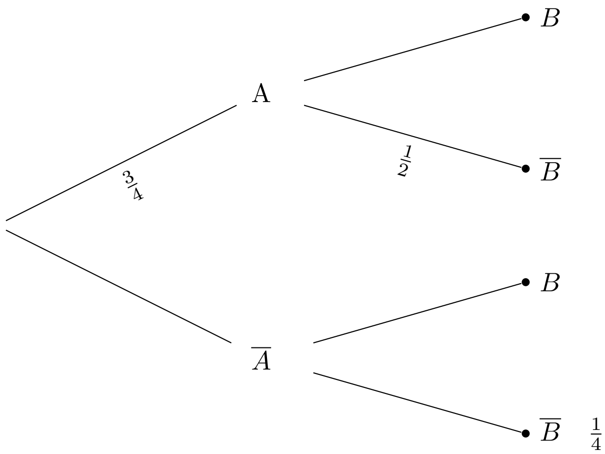

A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
0,6
0,3
0,14

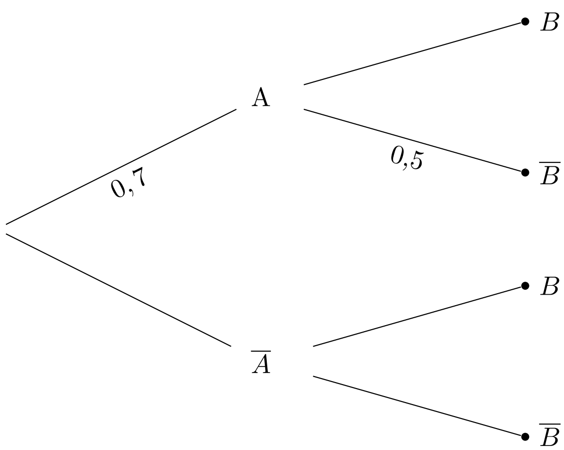

A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
0,4
0,04
0,06


A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
0,7
0
0,12

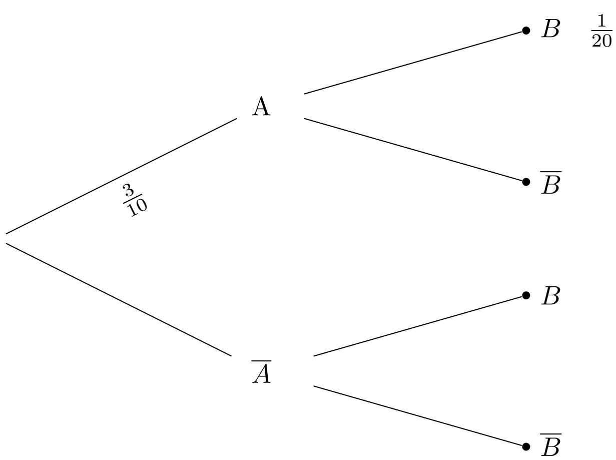

A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
0,1
0,9
0,02


A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
0,1
0,16
0,14

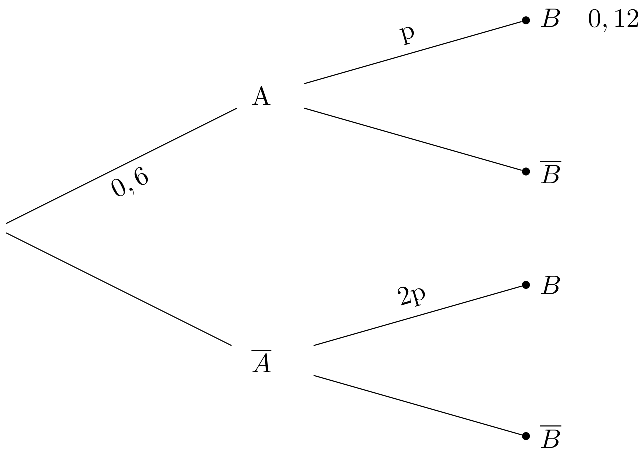


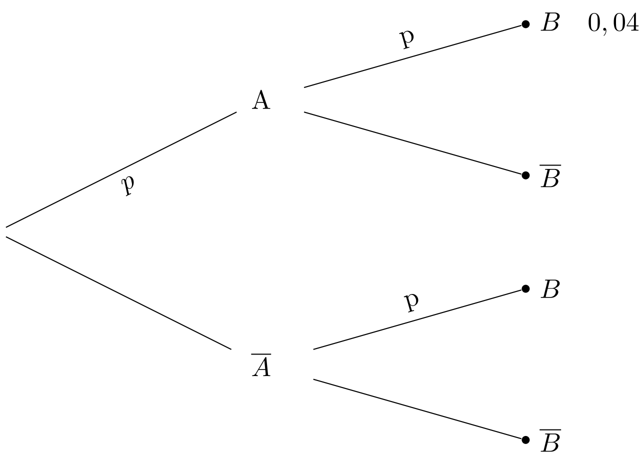


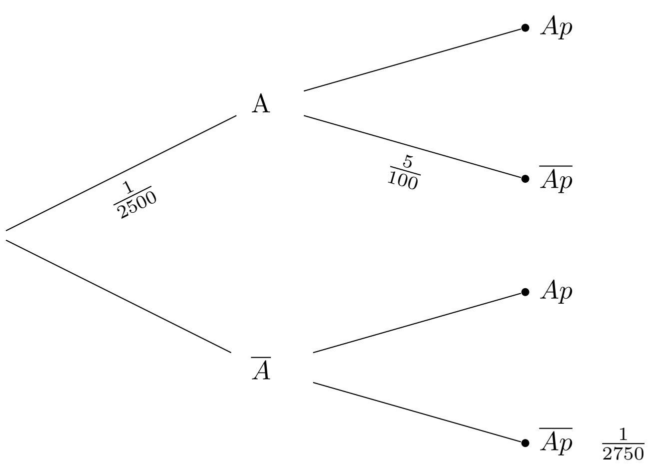
wobei A, B stochastisch unabhangig sind



wobei A, B stochastisch unabhangig sind


A
$\overline{A}$
0,6
p
2p
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
0,12


A
$\overline{A}$
p
p
p
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
0,04


A
$\overline{A}$
$\frac{1}{2500}$
$\frac{5}{100}$
Ap
$\overline{Ap}$
Ap
$\overline{Ap}$
$\frac{1}{2750}$

1.1 Textaufgaben

Aufgabe 2. *Für eine Aufnahmeprüfung an einer Hochschule melden sich erfahrungsgemäß Erstanmelder als auch Wiederholer an. 25 % der Kandidaten sind Wiederholer. 15% der Wiederholer und 28% der anderen Kandidaten bestehen die Prüfung nicht. Ein Kandidat wird zufällig ausgewählt. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er Wiederholer und zugleich einer, der nicht besteht? b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Kandidat Wiederholer, wenn er bestanden hat?*

Aufgabe 3. *60% der Kunden eines Kaufhauses parken in der Tiefgarage. Von denen in der Tiefgarage parkenden Kunden tätigen 90% einen Einkauf. 5% aller Kunden benutzen weder die Tiefgarage noch kaufen sie etwas ein. a) Wie viel Prozent der Kunden tätigen einen Einkauf? b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde, der nicht in der Tiefgarage parkt, etwas einkauft. c) An der Kasse steht ein Kunde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er die Tiefgarage benutzt?*

Aufgabe 4. *Die Firma Brettlmaier ist ein Holz verarbeitender Betrieb, der Profilbretter herstellt. Die Stämme, die zu Profilbrettern geschnitten werden, bezieht die Firma Brettlmaier von einem Händler, der das Holz waggonweise anliefert. 80 % der Waggons enthalten ausschließlich Stämme aus Europa; der Rest der Waggons hat ausschließlich Ware aus nichteuropäischen Ländern geladen. Nach dem Schnitt werden die Profilbretter nach den Qualitätsstufen A und B sortiert. Man erhält aus den europäischen Stämmen 65 % A-Bretter. Insgesamt liegt der Anteil der A-Sortierung bei 58 %. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewähltes Brett der B-Sortierung aus nichteuropäischem Holz hergestellt worden ist?*

Aufgabe 5. *Man liest gelegentlich, eine nach rechts geneigte Handschrift weise darauf hin, dass die zugehörige Person aufgeschlossen ist. In einem Unternehmen mit 50 Angestellten gelten 35 als aufgeschlossen. 40 % der als aufgeschlossen geltenden Angestellten haben eine Handschrift, die nicht nach rechts geneigt ist. Sechs Angestellte, die nicht als aufgeschlossen gelten, haben eine nach rechts geneigte Handschrift. Betrachtet werden folgende Ereignisse:*
A: Ein zufallig ausgewahlter Angestellter gilt als aufgeschlossen.
R: Ein zufallig ausgewahlter Angestellter hat eine nach rechts geneigte Handschrift.
a) Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{A \cap R}$ im Sachzusammenhang. b) Erstellen Sie zu der beschriebenen Situation ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm. c) Begründen Sie, dass die Ereignisse A und R abhängig sind. d) Von den im einleitenden Text angegebenen Zahlenwerten soll nur der Prozentsatz 40 % so geändert werden, dass die Ereignisse A und R unabhängig sind. Geben Sie den geänderten Wert an.

Aufgabe 6. *In einer Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln. Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment: Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in*

Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt a) Geben Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an. b) Betrachtet wird das Ereignis E: Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A. Untersuchen Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat

2 Die Vierfeldertafel

1. Ergänze die Vierfeldertafel und prüfe die stochastische Unabhängigkeit

	A	$\overline{A}$	
B	0,21		
$\overline{B}$		0,52	0,77
			1

2. Ergänze die Vierfeldertafel und prüfe die stochastische Unabhängigkeit

	A	$\overline{A}$	
B	0,20		0,55
$\overline{B}$	0,13		
			1

3. Ergänze die Vierfeldertafel und prüfe die stochastische Unabhängigkeit

	A	$\overline{A}$	
B	13		
$\overline{B}$		56	80
			100

4. Ergänze die Vierfeldertafel und prüfe die stochastische Unabhängigkeit

	A	$\overline{A}$	
B		7	
$\overline{B}$			77
		90	100

5. Ergänze die Vierfeldertafel und prüfe die stochastische Unabhängigkeit

	A	$\overline{A}$	
B		14	
$\overline{B}$	9		77
			150

6. Ergänze die Vierfeldertafel und prüfe die stochastische Unabhängigkeit

	A	$\overline{A}$	
B	21	68	
$\overline{B}$	42		178

7. Ergänze die Vierfeldertafel und prüfe die stochastische Unabhängigkeit

	A	$\overline{A}$	
B	70	22	
$\overline{B}$		12	
			124

8. Ergänze die Vierfeldertafel und prüfe die stochastische Unabhängigkeit

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{1}{10}$		
$\overline{B}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
			1

9. Ergänze die Vierfeldertafel und prüfe die stochastische Unabhängigkeit

	A	$\overline{A}$	
B	0		
$\overline{B}$		0,5	0,7
			1

10. Ergänze die Vierfeldertafel, wenn A, B stochastisch unabhängig sind.

	A	$\overline{A}$	
B	0,20		0,6
$\overline{B}$			
			1

11. Ergänze die Vierfeldertafel, wenn A, B stochastisch unabhängig sind.

	A	$\overline{A}$	
B			0,5
$\overline{B}$	0,2		
			1

12. Ergänze die Vierfeldertafel, wenn A, B stochastisch unabhängig sind.

	A	$\overline{A}$	
B			
$\overline{B}$		0,6	0,9
			1

2.1 Textaufgaben

Aufgabe 7. *Am IPA (Institut für Paranormale Aktivitäten unter Jugendlichen) befinden sich 200 Schüler. 140 sind blond, 80 besitzen ein eigenes Auto. 60 Schüler sowohl blond sind als auch Autobesitzer. a) Wie viel Prozent der blonden Schüler besitzen ein Auto? b) Sind die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig? c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewählter Schüler blond ist oder ein Auto besitzt?*

Aufgabe 8. *2 der 200 Schüler des IPA sind hochbegabte Frauen. a) Wenn es 104 Frauen und 3 Hochbegabte am Institut gibt, wie viel Prozent der Schüler sind dann normale Jungs? b) Wieviel Prozent der Frauen und wieviel Prozent der Jungen sind hochbegabt? c) Prüfen Sie auf stochastische Unabhängigkeit.*

Aufgabe 9. *Unter den 24 Mitarbeiter einer Abteilung sind 10 Frauen. 10 Mitarbeiter haben dieses Jahr einen Bonus ausbezahlt bekommen, dabei wurde die Hälfte der Frauen bedacht. Wieviel Prozent der Männer bekamen einen Bonus? Sind die Ereignisse, "Bonus" und "Geschlecht" stochastisch abhängig?*

Aufgabe 10. *In einer 19-köpfigen, - 8 Mädchen, 11 Jungen - Grundschulklasse wurden 12 Schüler aufs Gymnasium zugelassen, 4 bekammen die Realschulzulassung, die restlichen müssen eine Hauptschule besuchen, darunter zwei Mädchen. Kein Mädchen geht auf die Realschule. Sind "Gechlecht" und "Weiterführende Schule" stochastisch abhängig? Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Mädchen dieser Klasse auf das Gymnasium, (die Realschule, die Hauptschule) geht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Gymnasiast ein Junge?*

Aufgabe 11. ** In einer Molkerei beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Joghurtbecher beschädigt und somit unverkäuflich ist 5 %. Die beschädigten Becher weisen ausschließlich folgende Schäden auf: E: Aludeckel eingedrückt oder G: Becher gebrochen. Der Schaden E tritt bei 4 % aller Becher, der Schaden G bei 40 % der beschädigten Becher auf.*

a) Ermitteln Sie, ob die Schäden E und G unabhängig voneinander auftreten. b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Becher, dessen Deckel eingedrückt ist, gebrochen?

Aufgabe 12. ** Bei einem Einstellungstermin für den Polizeidienst waren 40 % der Bewerber Frauen, von denen 90 % die Aufnahmeprüfung bestanden. Drei Viertel derjenigen, die scheiterten, waren männlich. a) Welcher Anteil der männlichen Teilnehmer hat die Aufnahmeprüfung bestanden?*

3 Die Binomialverteilung

Definition. *Ein Spiel, welches n unabhängige, gleiche Versuche umfasst, welche jeweils zwei Ausgänge, Treffer und Niete genannt, hat nennt man Bernoullikette der Länge n. Für die Trefferwahrscheinlichkeit verwendet man den Buchstaben p, für die Nietenwahrscheinlichkeit den Buchstaben q = 1-p.*

Aufgabe 13. *Wie bestimmt man die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einer Bernoullikette der Länge 12 genau 4 Treffer erzielt, wenn die Wahrscheinlichekit für einen Treffer p = 0,25 ist?*

Man benutzt für diese Wahrscheinlichkeit eine eigene Bezeichnung und eine Formel, die n-p-k-Formel.

$$B(12; 0,25; 4) = \binom{12}{4} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75^8$$

Man muss etwas üben bis man die Formel lernt. Und dann muss man noch üben, sie in den Taschenrechner einzutippen. In diesen Tippt man ein

$$12nCr4 \ x \ 0,25^4 \ x \ 0,75^8 = 0,1936$$

Aufgabe 14. *Wie kann man mit dem Tafelwerk kontrollieren, ob man die Formel richtig gerechnet hat?*

Für manche Werte von n und p findet man die gesuchten Trefferwahrscheinlichkeiten für alle gesuchten Treffer im Tafelwerk. Wenn n z.B. 20 ist und p = 0,1 gilt und man wissen will wie wahrscheinlich es ist, dass man genau einen Treffer erzielt so rechnet man:

$$B(20; 0,1; 1) = \binom{20}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^{19} = 0,2702$$

Im Tafelwerk findet man diese Wahrscheinlichkeit indem man oben in der grauen Leiste p = 0,1 sucht, dann unter n = 20 in Hellrosa sucht man k = 1 heraus und liest in der linken Spalte die Wahrscheinlichkeit p = 0,27017 ab. Damit man keine Rundungsfehler macht schreibt man zur Sicherheit alle 5 Nachkommastellen ab. Das Tafelwerk funktioniert jedoch nicht immer, da nicht alle Werte für n dort verzeichnet sind. n = 21 ist dort z.B. nicht verzeichnet.

Definition. *Wenn man mehrere Treffer einer Bernoullikette betrachtet spricht man von einer Binomialverteilung*

Oft interessiert man sich dafür mehrere Trefferwahrscheinlichkeiten auszurechnen. Solange es sich dabei nur um zwei oder drei handelt so kann man dafür nach wie vor die n-p-k-Formel verwenden. So möchte man z.B. wissen wie wahrscheinlich es ist beim 5 maligen würfeln höchstens eine 6, also keine oder eine 6 zu würfeln.Die Wahrscheinlichkeit für eine 6 ist $p = \frac{1}{6}$. Dazu rechnet man zwei n-p-k Formeln aus:

$$B(5; \frac{1}{6}; 0) + B(5; \frac{1}{6}; 1) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,80376$$

Wann man aber 100 mal würfelt und wissen möchte wie wahrscheinlich es ist, dass man zwischen 20 und 40 6er würfelt, so wird man kaum 21 mal die n-p-k-Formel rechnen können. Daher bracuht man hier eine Hilfestellung, und die ist das Tafelwerk. Denn mit Hilfe des Tafelwerks kann man die Wahrscheinlichkeit für mehrere Treffer ermitteln.

Aufgabe 15. *Wie bestimme ich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ich bei einem Spiel der Länge n = 20 zwischen 0 und 4 Treffer erziele, wenn p = 0,125 gilt.*

Im deutschen sagt man dazu, dass man höchstens 4 Treffer erzielt. Dafür gibt es ein eigenes Zeichen:

$$\sum_{i=0}^{4} B(20; 0,125; i)$$

Die Wahrscheinlichkeit findet man im Tafelwerk unter p = 0,125 (grau, oben), n = 20 (hellrosa) und bei k=4 (dunkelrosa) in der rechten Spalte, denn hier stehen die kummulierten Wahrscheinlichkeiten, die alle Treffer von Null bis 4 aufaddieren.

$$\sum_{i=0}^{4} B(20; 0,125; i) =_{TW} 0,90499$$

Aufgabe 16. *Wie bestimme ich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ich bei einem Spiel der Länge n = 20 zwischen 2 und 20 Treffer erziele, wenn p = 0,125 gilt.*

Die gesuchten Trefferanzahlen gehen hier nicht bei null los, aber sie gehen bis zum maximalen Wert von 20. (Ich kann nicht mehr Treffer als Spiele haben). Im Deutschen spricht man von mindestens zwei Treffern. Dazu schreiben wir folgendes Zeichen:

$$\sum_{i=2}^{20} B(20; 0,125; i)$$

Diese Wahrscheinlichkeit finden wir nicht direkt im Tafelwerk, weshalb wir sie uns umschreiben:

$$\sum_{i=2}^{20} B(20; 0,125; i) = 1 - \sum_{i=0}^{1} B(20; 0,125; i)$$

Die 1 rechts oben ist um eins kleiner als die zwei links unten. Das neue Summenzeichen geht jetzt von null bis 1 und kann im Tafelwerk rechts nachgeslesen werden:

$$\sum_{i=2}^{20} B(20; 0,125; i) = 1 - \sum_{i=0}^{1} B(20; 0,125; i) =_{TW} 1 - 0,26695 = 0,73305$$

Aufgabe 17. *Wie bestimme ich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ich bei einem Spiel der Länge n =20 zwischen 3 und 8 Treffer erziele, wenn p = 0,125 gilt.*

Dieser Fall ist seltener. Das Zeichen dazu ist:

$$\sum_{i=3}^{8} B(20; 0,125; i)$$

Man muss sich das Zeichen umschreiben, damit man es mit dem Tafelwerk bearbeiten kann. Der Gedanke dazu ist folgender. Wenn ich alle Wahrscheinlochkeiten zwischen 3 und 8 addieren will, kann ich erst alle zischen 0 und 8 addieren und dann wieder alle zwischen 0 und 2 abziehen. Also:

$$\sum_{i=3}^{8} B(20; 0,125; i) = \sum_{i=0}^{8} B(20; 0,125; i) - \sum_{i=0}^{2} B(20; 0,125; i)$$

Beide Terme lassen sich im Tafelwerk auf der rechten Seite nachsehen:

$$\sum_{i=3}^{8} B(20; 0,125; i) = \sum_{i=0}^{8} B(20; 0,125; i) - \sum_{i=0}^{2} B(20; 0,125; i) = 0,99966 - 0,53531 = 0,46435$$

3.1 Aufgaben zu den Bernoulliketten

Aufgabe 18. *Berechne mit dem Taschenrechner und kontrolliere dann mit dem Tafelwerk, falls möglich.*

a)

4 Kein Treffer, Volle Trefferzahl, Mindestens ein Treffer

In Extremfällen vereinfacht sich die n-p-k Formel, so dass man den Ansatz abkürzen kann. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn man die Wahrscheinlchkeit für volle Trefferzahl berechnen will. Sei p =0,85 und n = 12 gegeben. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichekeit dafür, dass man 12 Treffer erzielt:

$$B(12; 0,85; 12) = \binom{12}{12} \cdot 0,85^{12} \cdot 0,15^{0}$$

Da sowohl $\binom{12}{12}$ als auch $0,15^0$ 1 sind vereinfacht sich die Formel zu

$$B(12; 0,85; 12) = \binom{12}{12} \cdot 0,85^{12} \cdot 0,15^{0} = 1 \cdot 0,85^{12} \cdot 1 = 0,85^{12}$$

Also ergibt sich bei voller Trefferzahl bei n Versuchen und Wahrscheinlichkeit p die vereinfachte Formel P('Trifft immer´) = p^n

Aufgabe 19. *Wie berechne ich Wahrscheinlichkeit, dass ich bei 10 Spielen, bei denen die Trefferwahrscheinlichkeit p =0,95 ist, alle 10 Spiele gewinne?*

$$P(10\ Treffer\ bei\ 10\ Spielen`) = p^n = 0,95^1 0 = 0,5987$$

Ähnlich liegt die Lage, wenn man die Wahrscheinlichkeit berechnen will keine Treffer zu erzielen. Wenn man z.B. 4 mal würfelt, p = $\frac{1}{6}$ für eine 6 ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit keinen Treffer zu erzielen:

$$B(4; \frac{1}{6}; 0) = \binom{4}{0} \cdot \frac{1}{6}^{0} \cdot \frac{5}{6}^{4} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{6}^{4} = \frac{5}{6}^{4} = 0,4823$$

Also ergibt sich mit q = 1 - p die vereinfachte Formel P(´Trifft nie´) = q^n

Aufgabe 20. *Wie berechne ich Wahrscheinlichkeit, dass ich bei 7 Spielen, bei denen die Trefferwahrscheinlichkeit p =0,1 ist, kein Spiel gewinne?*

$$P(Trifft\ bei\ 7\ Spielen\ kein\ mal) = q^n = 0,9^7 = 0,4783$$

Der dritte Fall, der sich vereinfachen lässt ist der, bei dem man mindestens einen Treffer erzielen soll. Das Gegenereignis zu mindestens einem Treffer ist es keinen Treffer zu erzielen. Also gillt P(mindestens ein Treffer) = 1 - P(Kein Treffer) = 1 - q^n.

Aufgabe 21. *Wie berechne ich die Wahrscheinlichkeit, dass ich bei 11 Spielen mindestens einmal treffe, wobei p = 0,2 gilt?*

$$P(Mindestens\,ein\,Treffer\,in\,11\,Spielen) = \sum_{i=1}^{11} B(11; 0,2; i) = 1 - 0,8^{11} = 1 - 0,0859 = 0,9141$$

4.1 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1. *Ein Spiel mit $p = 0{,}3$ wird 6 mal gespielt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für*
a) Es wird nie gewonnen.
b) Es wird immer gewonnen.
c) Es wird mindestens einmal gewonnen.

Übungsaufgabe 2. *Zoran kauft 3 Überraschungseier. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass er*
a) 3 Figuren
b) Keine Figur
c) Mindestens eine Figur bekommt.

Übungsaufgabe 3. *Beim Kniffel werden 5 Würfel geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für*
a) Keine Eins
b) Mindestens eine Eins
c) 5 Einser
d) 5 gleiche

Übungsaufgabe 4. *Eine Münze wird 8 mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für:*
a) 8 mal Kopf
b) Keinmal Kopf
c) 8 mal Zahl
d) 8 gleiche
e) Mindestens einmal Kopf

Übungsaufgabe 5. *Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler beim Training des FC Baysern anwesend ist, beträgt 97 %. Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Spieler bei 7 Trainings bei allen anwesend ist. Wie wahrscheinlich ist es, dass er mindestens einmal fehlt?*

Übungsaufgabe 6. *Jeder hundertste Mensch in einem fernen Land hat die seltene Gabe G. Wie wahrscheinlich ist es, das von 20 Menschen mindestens einer die Gabe hat. Wie wahrscheinlich ist es, dass von 42 keiner die Gabe G hat?*

5 Spezielle Bernoulliketten

Betrachtet man ein Spiel, bei welchem die Trefferwahrscheinlichkeit p gegeben ist, so kann man fragen, wie oft man dieses Spiel spielen sollte, um ziemlich sicher einmal einen Treffer erzielt zu haben. Man möchte dies gern vorher berechnen.

Aufgabe 22. *Die dreimal Mindestens Aufgabe Gegeben Sei ein Spiel mit Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,16. Wie oft muss man dieses Spiel mindestens (wenigstens) spielen um mit einer Sicherheit von mindestens (wenigstens) 95 % mindestens (wenigstens) einmal zu gewinnen.*

Wie notieren zuerst p und die Sicherheit:

$$p = 0,16 \qquad SH = 0,95$$

Die Länge der Kette ist n, dies ist unbekannt, wir wollen also zwischen 1 uns n Treffer:

$$\sum_{i=1}^{n} B(n; 0,16; i) \geq 0,95$$

Die linke Seite ersetzen wir durch die Formel $1 - q^n$ (s.o.), q ist die Gegenwahrscheinlichkeit von q, also 0,84:

$$1 - 0,84^n \geq 0,95 \quad | -1$$
$$-0,84^n \geq -0,05 \quad |: (-1)$$

Wenn man bei einer Ungleichung durch -1 teilt dreht sich das Zeichen

$$0,84^n \leq 0,05$$

Den letzten Schritt lernt man, das Zeichen dreht sich nochmal:

$$n \geq log_{0,84}(0,05)$$

Jetzt mit dem Taschenrechner:

$$n \geq 17,18$$

Bei diesen Aufgaben wird immer aufgerundet:

Antwort: Man muss mindestens 18 mal Spielen.

Manchmal interessiert man sich dafür wie groß p sein müsste, damit man mit einer gewissen Sicherheit immer(!) trifft. Zum Beispiel: Ein Virustest wird 10 mal durchgeführt. Wie groß sollte p dann sein, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % immer trifft.

Aufgabe 23. *Wie groß muss p mindestens sein, damit man bei n=10 Spielen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % alle 10 Spiele gewinnt?*

Der Ansatz ist:

$$B(10; p; 10) \geq 0,8$$

Die linke Seite bedeutet volle Trefferzahl und kann durch p^n also hier p^{10} ersetzt werden:

$$p^{10} \geq 0,8$$

Hier zieht man die 10te Wurzel:

$$p \geq \sqrt[10]{0,8}$$

Schließlich gibt es noch folgenden Typ Aufgabe. Gegeben ist ein hohes p z.B. p = 0,9. Man möchte höchstens so lange spielen, solanage seine Chancen immer zu gewinnen noch über einer gewissen Grenze, z.B. 50 % liegen. n ist dann unbekannt.

Aufgabe 24. *Wie oft darf man ein Spiel mit Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,9 höchstens spielen, damit die Wahrscheinlichkeit immer zu gewinnen noch über 50 % liegt?*

n ist unbekannt, also gilt der Ansatz:

$$B(n; 0,9; n) \geq 0,5$$

Die linke Seite (volle Trefferzahl) kann durch die Formel p^n also hier $0,9^n$ ersetzt werden:

$$0,9^n \geq 0,5$$

Jetzt wieder der Logarithmus samt Drehung des Ungleichheitszeichens:

$$n \leq log0,9(0,5)$$

Ausrechnen

$$n \leq 6,58$$

Bei diesem Typ wir immer abgerundet:
Antwort: Man darf höchstens 6 mal spielen.

5.1 Aufgaben zu speziellen Bernoulliketten

Aufgabe 25. *a) Wie oft muss man eine faire Münze mindestens werfen, um mit einer Sicherheit von mindestens 80 % mindestens einmal Kopf zu erhalten?*

b) Wie oft muss man mindestens würfeln, um mit einer Sicherheit von mindestens 90 % mindestens eine 6 zu erhalten?

c) Wie oft muss man mindestens Lotto spielen um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % wenigstens einmal fünf richtige zu erzielen? (Wahrscheinlichkeit für 5 richtige: 1 zu 60223)

d) Die Wahrscheinlichkeit mit einer Rakete eine feindliche Stellung zu zerstören sei 10 %. Wie oft muss man die Stellung mindestens beschießen, um mit einer Sicherheit von mindestens 99 % die Stellung zerstört zu haben?

e) Wie viele Überraschungseier muss ein Vater mindestens kaufen, um mit einer Sicherheit von mindestens 75% mindestens eine der speziellen Figuren zu erhalten?

f) Wie oft muss man das im IUS stehende Glücksrad mindestens drehen um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 85% wenigstens einmal schwarz zu drehen?

g) Wie oft muss man eine faire Münze mindestens werfen, um mit einer Sicherheit von mindestens 80 % mindestens zweimal Kopf zu erhalten?*

Aufgabe 26. *a) Ein Spiel wird 6 mal gespielt. Wie hoch muss p mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass man alle Spiele gewinnt noch über 70 % liegt?*

b) In der Produktion wird angestrebt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass von je 10 Produkten alle 10 intakt sind, über 95 % liegt? Wie groß muss p dazu sein?

c) Zu einem Kindergeburstag werden 14 Kinder eingeladen. Wie hoch muss die Zusagequote der einzelnen Kinder sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass all Kinder erscheinen über 90 % liegt?

d) Tim nimmt 5 mal die Woche morgens den Bus. Im letzten Jahr gab es 10 Wochen in denen der Bus immer pünktlich kam. Berechnen sie daraus die Wahrscheinlichekeit, dass der Bus morgens pünktlich kommt.

e) Bei einem Crashtest wurden jeweils 3 Versuche durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Dummy alle 3 Versuche überlebt wurde zu $p = 0{,}92$ ermittelt. Wie hoch ist die Überlebenswahrscheinlichkeit pro Crasch?

Aufgabe 27. *a) Ein Spiel wird n mal gespielt. Es gilt p = 0,78. Wie oft darf man höchstens spielen, damit die Wahrscheinlichkeit alle Spiele zu Gewinnen über 50 % liegt?*

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass Odysseus den Pfeil duch eine Axtkopf schießt liegt bei p =0,98. Wie viele Axtköpfe darf man ihm höchstens präsentieren, damit er durch alle noch mit einer Wahrscheinlichekit von 70 % trifft?

c) Ein Kandidat kann bei einem Fersehquiz alle Fragen mit einer Wahrscheinlichekeit von p =0,88 beantworten. Wie viele Fragen darf man ihm höchstens präsentieren, damit es wahrscheinlicher ist, dass er alle Fragen richtig beantwortet, als dass er einen Fehler macht?

d) Eine Münze wird geworfen. Die Wahrscheinlichekeit immer Kopf zu erzielen, soll über 1 % liegen. Wie oft darf man die Münze höchstens werfen?
e) n Würfel werden geworfen. Die Wahrscheinlichkeit nur 6er zu erzielen soll größer als 1 zu 5000 sein. Wie groß darf n höchstens sein?

6 Der Alternativtest

7 Der Signifikanztest