Das Analysis Script - IUS Oberstufe

Daniel Roth

December 4, 2023

Mathematics is beautiful, Philosophy is ugly

1 Lineare Funktionen

Definition. *Eine lineare Funktion besitzt die Normalform $y = mx + t$. Der dazugehörige Graph ist eine Gerade. m ist die Steigung und t der y-Achsenabschnitt der Geraden.*

Verständnis. *Der y-Wert setzt sich aus dem Grundwert t (der sich bei x = 0 ergibt) und m mal dem x-Wert zusammen. m gibt an um wieviele Einheiten die Gerade ansteigt, wenn x um eins erhöht wird.*

Beispiel. *Ein typisches Beispiel für eine Funktion ist eine Preisfunktion. Man zahlt für eine Waffel einen Grundpreis t = 4€ und für jedes Topping 50 ct = $\frac{1}{2}$ €. Dann lautet die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x + 4$.*

Aufgabe 1. *Wie bestimme ich bei einer linearen Funktion $y = \frac{1}{2}x + 4$ zu einem x - Wert x=3 den entsprechnenden y -Wert?*

Ich setzte den x-wert 3 für x ein und rechne den y-Wert aus:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 3 + 4 = 1,5 + 4 = 5,5$$

Aufgabe 2. *Wie bestimme ich den Schnittpunkt einer linearen Funktion $y = \frac{1}{2}x + 4$ mit der x-Achse?*

Man setzt für y Null ein und bekommt eine Gleichung

$$0 = \frac{1}{2}x + 4$$

Diese löst man mittels Äquivalenzumformung nach x auf.

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}x + 4 && \mid -4 && (1)\\
-4 &= \frac{1}{2}x && \mid : \frac{1}{2} && (2)\\
-8 &= x && && (3)
\end{aligned}
$$

Der gesuchte Schnittpunkt ist dann $N(-8 \mid 0)$ Den x-Wert nennt man auch Nullstelle.

Verständnis. *Der Schnittpunkt mit der x-Achse hat den y-Wert (Höhe) null. Man sucht also den x-Wert, bei dem der y-Wert null ist.*

Aufgabe 3. *Wie bestimme ich die Gleichung einer linearen Funktion aus einem vorgegebenen Punkt $P(2 \mid -3)$ und einer Steigung m =-0,5?*

Man schreibt sich die Normalform der Gerade y = mx + t auf und setzt den x-Wert von P, den y-Wert von P und m in diese Funktionsgleichung ein. Mit Äquivalenzumformung löst man nach t auf.

$$
\begin{aligned}
-3 &= -0,5 \cdot 2 + t && && (4)\\
-3 &= -1 + t && \mid +1 && (5)\\
-2 &= t && && (6)
\end{aligned}
$$

Am Ende wird die Funktionsgleichung notiert, wobei x und y wieder "freigelassen" werden.

$$Antwort : y = -0,5x - 2$$

Verständnis. *Man denkt sich den Punkt P als "Startpunkt", von dem man aus die Steigung nach vorne und zurück gehen kann. Wenn man bei der y-Achse ankommt ergibt sich der t-Wert.*

Aufgabe 4. *Wie bestimme ich die Gleichung einer linearen Funktion aus zwei vorgegebenen Punkten $P(2 \mid -3)$ und $Q(5 \mid -1)$?*

Wir nehmen P als der "ersten" Punkt und Q als den "zweiten" und schreiben:

$$P(\underbrace{2}_{x_1} \mid \underbrace{-3}_{y_1}) \text{ und } Q(\underbrace{5}_{x_2} \mid \underbrace{-1}_{y_2})$$

Für die Steigung m zwischen den beiden Punkten gilt die Formel (auswendig lernen):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

. In diese setzen wir ein:

$$m = \frac{-1-(-3)}{5-2} = \frac{2}{3}$$

Jetzt setzen wir dieses m und den x-Wert und y-Wert von P in die Normalform der Gerade y =mx+t ein und lösen nach t auf:

$$-3 = \frac{2}{3} \cdot 2 + t \tag{7}$$
$$-3 = \frac{4}{3} + t \qquad | - \frac{4}{3} \tag{8}$$
$$-4\frac{1}{3} = t \tag{9}$$

Antwort: $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

Verständnis. *Der Zähler in der Formel ist die Differenz der y-Werte, das ist der "Höhenunterschied", der Nenner ist die Differenz der x-Werte, das ist der "Längenunterschied". Der Quotient, Höhenunterschied pro Längenunterschied ist die Steigung.Je mehr Höhe pro Länge eine Gerade steigt desto steiler ist sie. (siehe die Skizze in der Formelsammlung). Sind beide gleich so ist die Steigung 1, das ergibt eine Diagonale im Quadrat. Im Strassenbau wird diese 1 als 100% gesetzt und eine Steigung von m = 0,2 wird als 20% bezeichnet.*

Aufgabe 5. *Wie bestimme ich den Schnittpunkt zweier linearer Funktionen* $y = -\frac{2}{3}x + 1$ *und* $y = \frac{1}{4}x - 4,5$ *?*

Man stzt die beiden Funktionsterme (rechts von dem y) gleich und löst die Gleichung mit Äquivalenzumformung. Dazu bring man die Terme mit x nach links und die Terme ohne x nach rechts:

$$-\frac{2}{3}x + 1 = \frac{1}{4}x - 4,5 \qquad | - \frac{1}{4}x \quad | - 1 \tag{10}$$
$$-\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x = -4,5 - 1 \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

Die linke Seite berchnet man indem man die beiden Zahlen vor dem x mit dem Taschenrechner verrechnet: $-\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = -\frac{11}{12}$

$$-\frac{11}{12}x = -5,5 \qquad | : (-\frac{11}{12}) \tag{13}$$
$$x = 6 \tag{14}$$

Den x-Wert setzt man dann in die erste Funktionsgleichung ein und erhält so den y-Wert:

$$y = -\frac{2}{3} \cdot 6 + 1 = -3$$

Der gesuchte Schnittpunkt ist dann $S(6 \mid -3)$

Aufgabe 6. *Wie prüfe ich ob ein Punkt $C(-2 \mid -3)$ auf einer Geraden mit der Funktionsgleichung $y = -\frac{2}{3}x + 1$ liegt?*

Man setzt den x-Wert und den y-Wert von C für x und y ein und rechnet die rechte Seite aus:

$$-3 = -\frac{2}{3} \cdot (-2) + 1 \tag{15}$$

$$-3 = \frac{4}{3} + 1 \tag{16}$$

$$-3 = 2\frac{1}{3} \tag{17}$$

Da die letzte Aussage falsch ist liegt C nicht auf der Geraden.

Aufgabe 7. *Wie bestimme ich die Geradengleichung einer Gerade, die parallel auf eine andere Gerade mit Gleichung $y = -\frac{3}{4}x - 2$ steht und durch einen vorgegeben Punkt $C(-2 \mid 3)$ verläuft?*

Da die gesuchte Gerade parallel zu den gegebenen ist, hat sie die gleiche Steigung $m = -\frac{3}{4}$. Nun stezt man m, den x-wert und den y-Wert von C in die Normalform y=mx+t ein und löst nach t auf:

$$3 = -2 \cdot (-\frac{3}{4}) + t \tag{18}$$

$$3 = 1,5 + t \qquad | - 1,5 \tag{19}$$

$$1,5 = t \tag{20}$$

Antwort: Die Funktionsgleichung lautet $y = -\frac{3}{4}x + 1,5$.

Aufgabe 8. *Wie bestimme ich die Geradengleichung der Normalen, die senkrecht auf eine andere Gerade mit Gleichung $y = -\frac{3}{4}x - 2$ steht und durch einen vorgegeben Punkt $C(-2 \mid 3)$ verläuft?*

Die senkrechte Steigung m_N zu einer vorgegebenen Steigung m heißt Normalensteigung. Man erhält sie duch die Formel

$$m_N = -\frac{1}{m}$$

(Siehe auch Merkhilfe Seite 4) Damit ergibt sich

$$m_N = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Die senkrechte Steigung und den Punkt C geben wir in die Normalenform y = mx + t ein lösen nach t auf.

$$3 = -2 \cdot (\frac{4}{3}) + t \tag{21}$$

$$3 = -\frac{8}{3} + t \qquad | + \frac{8}{3} \tag{22}$$

$$5\frac{2}{3} = t \tag{23}$$

Antwort: Die Funktionsgleichung lautet $y = \frac{4}{3}x + 5\frac{2}{3}$.

Aufgabe 9. *a) Gib die Funktionsgleichung einer Gerade an, die Parallel zur x-Achse ist. b) Gib die Funktionsgleichung einer Gerade an, die durch den Ursprung geht. c) Gib die Funktionsgleichung einer Gerade an, die diagonal im 45 Grad Winkel den ersten Quadranten halbiert. d) Gib die Funktionsgleichung einer Gerade an die senkrecht zur x-Achse verläuft.*

$$a)y = 5 \tag{24}$$

$$b)y = 2x \tag{25}$$

$$c)y = x \tag{26}$$

$$d)x = 4 \tag{27}$$

Verständnis. *Wenn eine Gerade parallel zur x-Achse ist hat sie Steigung m= 0, damit fällt mx komplett weg. Der y Wert ist dann immer der Gleiche, egal was x ist. Wenn eine Gerade durch den Ursprung geht ist der t-Wert null und fällt weg, eine solche Gerade ist dann nur noch durch die Gleichung y = mx bestimmt. Bei der Diagonalen ist beim Steigungsdreieck Länge und Höhe gleich also m =1, aus y = 1x wird dann einfach y = x. Senkrechte Geraden beschreibt man, indem man nur den x -Wert angibt, diese lassen sich nicht als Funktionen mit y schreiben.*

1.1 Übungen zu linearen Funktionen

Übungsaufgabe 1. *Bestimme zu jeder linearen Funktion für die vorgegebenen x- Werte die y-Werte.*

a) $y = 2x - 3$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

b) $y = -x + 4$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

c) $y = \frac{1}{2}x - 1$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

d) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

e) $y = x$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

f) $y = 2$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

g) $y = 3x$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

Übungsaufgabe 2. *Bestimme den Schnittpunkt der linearen Funktion mit der x-Achse? (Formelsammlung S.14.)*

a) y = 5x-2   b) y = 2x+1   c) y = 6x-3   d) y = 2x-3   e) y = -x+4

f) $y = \frac{1}{2}x - 1$ *g)* $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ *h) y = x   i) y = 2   j) y = 3x*

Übungsaufgabe 3. *Bestimme die Gleichung der linearen Funktion, die Steigung m hat und durch den Punkt P verläuft.*

a) m = 3, $P(2 \mid -4)$ *b) m = -2,* $P(1 \mid -3)$ *c) m = 1,* $P(0 \mid -3)$
d) $m = \frac{1}{2}$, $P(1,2 \mid -2)$ *e) m = 0,2,* $P(-4 \mid 3)$ *f) m = 3,* $P(0,2 \mid -0,3)$
g) m = 0, $P(2 \mid -1)$ *h) m = 3,5,* $P(2,5 \mid 3)$ *i)* $m = \frac{3}{5}$, $P(2 \mid -3)$

Übungsaufgabe 4. *Wie bestimme ich die Gleichung einer linearen Funktion aus zwei vorgegebenen Punkten P und Q ?*
a) $P(2 \mid -3), Q(5 \mid -1)$ *b)* $P(1 \mid 3), Q(1 \mid -1)$ *c)* $P(2 \mid 3), Q(-5 \mid -11)$
d) $P(0 \mid -1), Q(6 \mid -1)$ *e)* $P(2 \mid 0), Q(5 \mid 1,5)$ *f)* $P(2,1 \mid 3,4), Q(5,1 \mid 1,4)$
g) $P(\frac{2}{3} \mid 3), Q(\frac{5}{3} \mid 1)$ *h)* $P(22 \mid -13), Q(51 \mid -11)$ *i)* $P(0 \mid -3), Q(5 \mid 0)$

Übungsaufgabe 5. *Bestimme den Schnittpunkt der beiden linearen Funktionen.*

a) $g_1 : y = 5x - 2$ *und* $g_2 : y = 2x + 1$ *b)* $g_1 : y = 6x - 3$ *und* $g_2 : y = 2x - 3$

c) $g_1 : y = \frac{1}{2}x - 1$ *und* $g_2 : y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ *d)* $g_1 : y = \frac{1}{2}x - 3$ *und* $g_2 : y = 2$

e) $g_1 : y = 3x$ *und* $g_2 : y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$ *f)* $g_1 : y = -\frac{2}{3}x + 1$ *und* $g_2 : y = -\frac{2}{3}x - 1,5$

Übungsaufgabe 6. *Prüfe ob der Punkt A auf,(* oberhalb oder unterhalb) der linearen Funktion liegt.*

a) $y = 5x - 2$, $A(-1 \mid 2)$ *b)* $y = 2x + 1$, $A(-1 \mid 2)$ *c)* $y = 6x - 3$, $A(-1 \mid 2)$

d) $y = \frac{1}{2}x - 1$, $A(-1 \mid 2)$ *e) :* $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, $A(-1 \mid 2)$ *f)* $y = \frac{1}{2}x - 3$, $A(-1 \mid 2)$

g) $y = 3$, $A(-1,5 \mid 1)$ *h)* $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$, $A(-1 \mid 2)$ *i)* $y = -\frac{2}{3}x + 1$, $A(-\frac{2}{3} \mid -1,5)$

Übungsaufgabe 7. *Bestimme ich die Gliechung einer Gerade, die parallel zu einer gegebenen Gerade verläuft und durch einen vorgegeben Punkt C verläuft?*

a) $y = 5x - 2$, $C(-1 \mid 3)$ *b)* $y = 2x + 1$, $C(-1 \mid 2)$ *c)* $y = 6x - 3$, $C(0 \mid 2)$

d) $y = \frac{1}{2}x - 1$, $C(5 \mid 2)$ *e)* $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, $C(0 \mid 0)$ *f)* $y = \frac{1}{2}x - 3$, $C(-1 \mid 1)$

g) $y = 3$, $C(-1,5 \mid 1)$ *h)* $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$, $C(12 \mid 2)$ *i)* $y = -\frac{2}{3}x + 1$, $C(-\frac{2}{3} \mid -1,5)$

Übungsaufgabe 8. *Bestimme ich die Gliechung der Normalen, die senkrecht zu einer gegebenen Gerade verläuft und durch einen vorgegeben Punkt C* $C(-2 \mid$

3) *verläuft?*

a) $y = 5x - 2$, $C(-1 \mid 3)$ *b)* $y = 2x + 1$, $C(-1 \mid 2)$ *c)* $y = 6x - 3$, $C(0 \mid 2)$

d) $y = \frac{1}{2}x - 1$, $C(5 \mid 2)$ *e)* $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, $C(0 \mid 0)$ *f)* $y = \frac{1}{2}x - 3$, $C(-1 \mid 1)$

g) $y = 3$, $C(-1,5 \mid 1)$ *h)* $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$, $C(12 \mid 2)$ *i)* $y = -\frac{2}{3}x + 1$, $C(-\frac{2}{3} \mid -1,5)$

Übungsaufgabe 9. *Zeichne die linearen Funktionen in ein Koordinatensystem ein*

a) $y = 5x - 2$ *b)* $y = 2x + 1$ *c)* $y = 6x - 3$ *d)* $y = -2x - 3$

e) $y = \frac{1}{2}x - 1$ *f)* $y = -\frac{3}{4}x+!$ *g)* $y = -\frac{1}{3}x - 3$ *h)* $y = \frac{2}{3}x - 2$

i) $y = 2$ *j)* $y = -1,5$ *k)* $y = x$ *l)* $y = \frac{3}{4}x$

m) Gerade durch $P(2 \mid -3)$ *und* $Q(5 \mid -1)$ *n) durch* $P(2 \mid 4)$ *und* $Q(1 \mid -1)$

o) Gerade durch $P(2 \mid -3)$ *mit m = 2 p) durch* $Q(5 \mid -1)$ *mit* $m = -\frac{3}{5}$

q) durch $P(2 \mid -3)$ *parallel zur Winkelhalbierenden r) x = 4 s) x = -2*

Übungsaufgabe 10. *Eine Kerze ist 12 cm hoch und brennt gleichmäßig (linear) ab. Nach 7,5 Stunden ist sie noch 2 cm hoch.*

a) Wie schnell brennt die Kerze pro Stunde?
b) Bestimme die Funktionsgleichung der Kerzenhöhe in Abhängigkeit von der Zeit
b) Wann ist die Kerze abgebrant?
c) Skizziere die Funktion

2 Potenzregeln

Definition. *Wenn man eine Zahl a n mal mit sich selbst multipliziert so schreibt man*

$$a^n$$

Man spricht "a hoch n", a nennt man Basis und n den Exponenten.

Die Potenzregeln befinden sich in der Formelsammlung auf Seite 18.

Aufgabe 10. *Wie vereinfache ich einen Term voller Potenzen ohne Bruchstrich?*

$$3a^2b^4c^{-3}4(ab^{-2}c^5)^3c^{-2}b6a^7$$

Zuerst löse ich die Klammer auf, indem ich jeden Faktor hoch 3 rechnen, d.h. die Potenzen verdreifachen sich:

$$3a^2b^4c^{-3}4(a^3b^{-6}c^{15})c^{-2}b6a^7$$

Da der Term eine Malkette ist kann ich die Klammern weglassen und alles sortieren: Erst die Zahlen, dann die a, dann die b, dann die c:

$$3\cdot 4\cdot 6a^2a^3a^7b^4b^{-6}bc^{-3}c^{15}c^{-2}$$

Jetzt die Zahlen ausrechnen und die a, b, c zusammenfassen indem die Exponenten addiert werden:

$$72a^{12}b^{-1}c^{10}$$

Aufgabe 11. *Wie vereinfache ich einen Term voller Potenzen mit Bruchstrich?*

$$\frac{3a^2b^4c^{-3}4ab^{-2}c^5c^{-2}b6a^7}{4a^2b^{-3}c^8ab^2\cdot 14b^{-1}}$$

Wir sortieren oben und unten getrennt nach Zahlen, a, b, c usw.

$$\frac{3\cdot 4\cdot 6a^2\cdot a\cdot a^7b^4b^{-2}bc^{-3}c^5c^{-2}b}{4\cdot 14\cdot a^2ab^{-3}b^2b^{-1}c^8}$$

Oben und unten zusammenfassen:

$$\frac{72\cdot a^{10}\cdot b^{-1}c^0}{56\cdot a^3b^{-2}c^8}$$

Jetzt die Zahlen vorne trennen und die unteren a, b, c ... nach oben neben die a, b, c, schreiben und dabei das Vorzeichen umdrehen:

$$\frac{72}{56}a^{10}a^{-3}b^{-1}b^2c^0c^{-8}$$

Und dann noch zusammenfassen mit Potenzregenl

$$\frac{72}{56}a^7b^1c^{-8}$$

Bruch kürzen und hoch 1 kann man weglassen gibt dann:

$$\frac{9}{7}a^7bc^{-8}$$

2.1 Übungen zu den Potenzregeln

Übungsaufgabe 11. *Vereinfache die folgenden Terme mit Hilfe der Potenzregeln.*

a) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ *b)* $abcabcabcabc3bac5$ *c)* $2\ x^2 \cdot x \cdot y^6 \cdot y$ *d)* $4x^4y^5z^2 \cdot 3x^2yz^{11}$

e) $p \cdot p^2 \cdot p^3 \cdot p^4 \cdot 12^2$ *f)* $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot x \cdot y^2 \cdot x \cdot y^2$ *g)* $\frac{1}{4}e^3 \cdot e^2 \cdot 2$ *h)* $2 \cdot 2^{10} \cdot 4 \cdot 2^6$

Übungsaufgabe 12. *Vereinfache die folgenden Terme mit Hilfe der Potenzregeln.*

a) $a^{-2} \cdot a \cdot a^3 \cdot a^0 \cdot a^{-3} \cdot a^5$ *b)* $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}abca^{-1}b^{-1}c4bac5$ *c)* $2\ x^{-2} \cdot x \cdot y^{-6} \cdot y$

d) $2x^4y^5z^2 \cdot 3x^{-2}y^0z^{-11}$ *e)* $p \cdot p^2 \cdot p^3 \cdot p^{-4} \cdot 12^{-2}$ *f)* $2^3 \cdot 3^{-4} \cdot 5^2 \cdot x \cdot y^{-2} \cdot x \cdot y^2$

g) $\frac{1}{4}e^3 \cdot e^{-2} \cdot 2^{-1}$ *h)* $2 \cdot 2^{-10} \cdot 4 \cdot 2^6$ *i)* $2cm^2 \cdot 5cm$ *j)*$1000m \cdot 1000m$

3 Binomische Formeln

Satz.

$$(\bigcirc + \square)^2 = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2 \tag{28}$$

$$(\bigcirc - \square)^2 = \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2 \tag{29}$$

$$(\bigcirc + \square) \cdot (\bigcirc - \square) = \bigcirc^2 - \square^2 \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

Diese drei Sätze heißen Binomische Formeln. In der Formelsammlung werden die Parameter a und b verwendet (S.8 unten)

Verständnis. *Die binomischen Formeln kürzen die Rechnung etwas ab. Eigentlich muss man Klammer mal Klammer rechnen. Zum Beispiel beim zweiten Fall.*

$$(\bigcirc - \square)^2 = (\bigcirc - \square) \cdot (\bigcirc - \square)$$

Hier muss man jetzt alles mit allem multiplizieren, also Kreis mal Kreis plus Kreis mal minus Kasten etc.

$$\bigcirc \cdot \bigcirc + \bigcirc \cdot (-\square) + (-\square) \cdot \bigcirc + (-\square) \cdot (-\square)$$

Das ergibt

$$\bigcirc^2 \underbrace{- \bigcirc \cdot \square - \square \cdot \bigcirc}_{gleich} + \square^2$$

Und damit

$$\bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

Aufgabe 12. *Wie berechne ich die binomischen Formeln in einfachen Fällen?*

$$a)(x + 4)^2 \tag{32}$$

$$b)(y - 2)^2 \tag{33}$$

$$c)(x + 3) \cdot (x - 3) \tag{34}$$

a) Ich rechne analog zu oben:

$$(x + 4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2$$

In der Mitte kann ich die 2 und die 4 multiplizieren, rechts rechne ich die Qudratzahl:

$$x^2 + 8x + 16$$

b) genauso, nur mit einem Minus in der Mitte:

$$(y - 2)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = y^2 - 4y + 4$$

c) geht noch schneller:

$$(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

Aufgabe 13. *Wie berechne ich die binomischen Formeln, wenn es mehrere Faktoren sind?*

$$a)(3x+4y)^2 \tag{35}$$
$$b)(5y^3 - 2x^2)^2 \tag{36}$$
$$c)(6x+3a^3)\cdot(6x-3a^3) \tag{37}$$

a) Man muss links und rechts alle Faktoren quadrieren!

$$(3x+4y)^2 = 3^2x^2 + 2\cdot 3x \cdot 4y + 4^2y^2$$

Zahlen noch ausrechnen, in der Mitte sind es hier drei Zahlen:

$$9x^2 + 24xy + 16y^2$$

b) Man muss links und rechts alle Faktoren quadrieren! Dabei muss man die Potenzregeln berücksichtigen, beim Quadrieren heißt das, dass sich Potenzen verdoppeln:

$$(5y^3 - 2x^2)^2 = 5^2y^6 - 2\cdot 5y^3 \cdot 2x^2 + 2^2x^4$$

Zahlen ausrechnen und nach vorne:

$$25y^6 - 20y^3x^2 + 4x^4$$

c) Etwas einfacher, weil ohne Mitte.

$$(6x+3a^3)\cdot(6x-3a^3) = 6^2x^2 - 3^2a^6 = 36x^2 - 9a^6$$

4 Der Satz des Pythagoras

Definition. *Die längste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks gegenüber des rechten Winkels heißt Hypothenuse. Die beiden kurzen Seiten heißen Katheten.*

Satz. *Im rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras. Die Summe der Quadratzahl der Hypothenuse H ist gleich der Summe der Quadratzahlen der beiden Katheten,* K_1, K_2

$$H^2 = {K_1}^2 + {K_2}^2$$

. Gilt der Satz nicht, ist das Dreieck nicht rechtwinklig. Oft verwendet man die Parameter a und b für die Katheten und c für die Hypothenuse. (Siehe Merkhilfe S.2))

Aufgabe 14. *Wie berechne ich die Hypothenuse im rechtwinkligen Dreieck, wenn ich die beiden Kathetenlängen* $K_1 = 9$ *und* $K_2 = 7$ *gegeben habe?*

$$H^2 = 9^2 + 7^2 \tag{38}$$
$$H^2 = 81 + 49 \tag{39}$$
$$H^2 = 130 \tag{40}$$
$$H = \sqrt{130} \tag{41}$$
$$H = 11,40 \tag{42}$$

Aufgabe 15. *Wie berechne ich die Kathete im rechtwinkligen Dreieck, wenn ich die andere Kathete* $K = 8$ *und die Hypothenuse* $H = 12$ *gegeben habe?*

$$12^2 = 8^2 + K^2 \tag{43}$$
$$144 = 64 + K^2 \mid -64 \tag{44}$$
$$80 = K^2 \tag{45}$$
$$\sqrt{80} = K \tag{46}$$
$$K = 8,94 \tag{47}$$

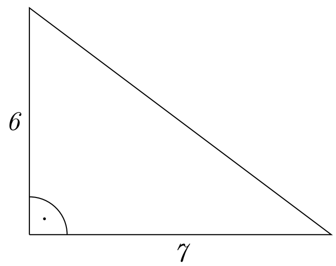
Aufgabe 16. *Wie prüfe ich ob ein Dreieck mit den Seitenlängen 5, 11 und 12 rechtwinklig ist?*

Man prüft den Satz des Pythagoras, links setzt man die grösste Länge, rechts die beiden kurzen ein.

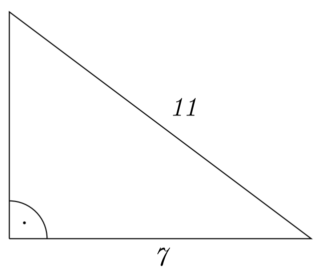
$$12^2 = 5^2 + 11^2 \tag{48}$$
$$144 = 25 + 121 \tag{49}$$
$$144 = 146 \tag{50}$$
$$\tag{51}$$

Die Aussage ist falsch, das Dreieck ist nicht rechtwinklig.

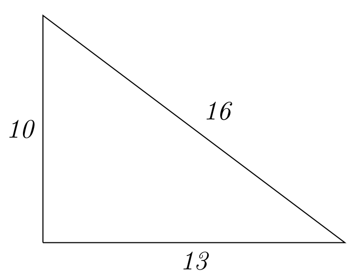
Übungsaufgabe 13. *Berechne die Hypothenuse*



Übungsaufgabe 14. *Berechne die fehlende Kathete*



Übungsaufgabe 15. *Prüfe, ob das Dreieck rechtwinklig ist.*



5 Kreis und Kugel

Definition. *Ein Kreis ist vollständig durch seinen Radius r bestimmt. Für Fläche A und Umfang u gelten die beiden Formeln*

$$A = r^2 \cdot \pi$$

$$u = 2 \cdot r \cdot \pi$$

wobei π die Kreistzahl mit unendlichen vilelen Nachkommastellen ist.

Aufgabe 17. *Wie bestimme ich die Fläche und den Umfang eines Kreises, wenn der Radius $r = 6$ cm gegeben ist?*

Man rechnet ersteinmal ohne Einheiten und setzt in die Formelen ein. Für π verwenden wir standardmäßig die Näherung $\pi = 3,14$

$$A = r^2 \cdot \pi = 6^2 \cdot 3,14 = 113,04[cm^2]$$

$$u = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 6 \cdot 3,14 = 37,68[cm]$$

Man setzt erst am Ende die Einheit in eckige Klammern, dann gibt man einen Antwortsatz: Die Fläche beträqt $113,04cm^2$, der Umfang beträgt 37,68 cm.

Aufgabe 18. *Wie bestimme ich den Radius eines Kreises, wenn ich die Fläche $A = 8m^2$ gegeben habe?*

Wir setzen die Fläche in die Formel ein:

$$A = r^2 \cdot \pi \tag{52}$$

$$8 = r^2 \cdot 3,14 \qquad |: 3,14 \tag{53}$$

$$2,55 = r^2 \qquad | \sqrt{} \tag{54}$$

$$1,60 = r \tag{55}$$

$$r = 1,60[m] \tag{56}$$

Antwort: Der Radius ist 1,6 m lang.

Aufgabe 19. *Wie bestimme ich den Radius eines Kreises, wenn ich den Umfang $u = 28cm$ gegeben habe?*

Wir setzen den Umfang in die Formel ein:

$$u = 2 \cdot r \cdot \pi \tag{57}$$

$$28 = 2 \cdot r \cdot 3,14 \tag{58}$$

$$28 = r \cdot 6,28 \qquad |: 6,28 \tag{59}$$

$$4,46 = r \tag{60}$$

$$r = 4,46[cm] \tag{61}$$

Antwort: Der Radius ist 4,46 cm lang.

Definition. *Eine Kugel ist vollständig durch ihren Radius r bestimmt. Für Volumen V und Oberfläche O gelten die beiden Formeln*

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

wobei π die Kreistzahl mit unendlichen vilelen Nachkommastellen ist.

Aufgabe 20. *Wie bestimme ich das Volumen und die Oberfläche einer Kugel, wenn der Radius $r = 5$ cm gegeben ist?*

Man rechnet ersteinmal ohne Einheiten und setzt in die Formelen ein. Für π verwenden wir standardmäßig die Näherung $\pi = 3,14$

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 3,14 = 523,33[cm^3]$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi = 4 \cdot 5^2 \cdot 3,14 = 314[cm^2]$$

Man setzt erst am Ende die Einheit in eckige Klammern, dann gibt man einen Antwortsatz: Das Volumen beträqt $523,33cm^3$, die Oberfläche beträgt $314cm^2$.

Aufgabe 21. *Wie bestimme ich den Radius einer Kugel, wenn ich das Volumen $V = 2m^3$ gegeben habe?*

Wir setzen das Volumen in die Formel ein:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \tag{62}$$

$$2 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3,14 \tag{63}$$

$$2 = r^3 \cdot 4,19 \qquad |: 4,19 \tag{64}$$

$$0,48 = r^3 \qquad | \sqrt[3]{} \tag{65}$$

$$0,78 = r \tag{66}$$

$$r = 0,78[m] \tag{67}$$

Antwort: Der Radius ist 0,78 m lang. Die 3te Wurzel berechnet man mit der Taschenrechner Taste $\sqrt[y]{x}$.

Aufgabe 22. *Wie bestimme ich den Radius einer Kugel, wenn ich die Oberfläche $O = 12dm^2$ gegeben habe?*

Wir setzen die Oberfläche in die Formel ein:

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi \tag{68}$$
$$12 = 4 \cdot r^2 \cdot 3,14 \tag{69}$$
$$12 = r^2 \cdot 12,56 \qquad |: 12,56 \tag{70}$$
$$0,96 = r^2 \qquad | \sqrt{} \tag{71}$$
$$0,98 = r \tag{72}$$
$$r = 0,98[dm] \tag{73}$$

Antwort: Der Radius ist 0,98 dm lang.

Übungsaufgabe 16. *Gegeben ist der Radius r eines Kreises. Berechne die Kreisfläche und den Umfang des Kreises.*

$a)r = 10cm \quad b)r = 4mm \quad c)r = 1km \quad d)r = 2,4dm$

$e)r = 0,92m \quad f)r = \frac{1}{4}m \quad g)r = 0,02mm \quad h)r = 5,8Zoll$

Übungsaufgabe 17. *Gegeben ist die Fläche A eines Kreises. Berechne den Radius r.*

$a)A = 10cm^2 \quad b)A = 4mm^2 \quad c)A = 1km^2 \quad d)A = 3,14dm^2$

$e)A = 6,92m^2 \quad f)A = \frac{1}{4}m^2 \quad g)A = 0,02mm^2 \quad h)A = 9\pi m^2$

Übungsaufgabe 18. *Gegeben ist derUmfang u eines Kreises. Berechne den Radius r des Kreises.*

$a)u = 12cm \quad b)u = 4mm \quad c)u = 1km \quad d)u = 2,4dm$

$e)u = 0,94m \quad f)u = \frac{1}{4}m \quad g)u = 0,02mm \quad h)u = 6Zoll$

Übungsaufgabe 19. *Gegeben ist der Radius r einer Kugel. Berechne das Volumen und die Oberfläche der Kugel.*

$a)r = 10cm \quad b)r = 4mm \quad c)r = 1km \quad d)r = 2,4dm$

$e)r = 0,92m \quad f)r = \frac{1}{4}m \quad g)r = 0,02mm \quad h)r = 5,8 \cdot 10^5m$

Übungsaufgabe 20. *Gegeben ist das Volumen V einer Kugel. Berechne den Radius r der Kugel.*

$a)V = 100cm^3 \quad b)V = 40mm^3 \quad c)V = 1km^3 \quad d)V = 3,14dm^3$

$e)V = 63,92m^3 \quad f)V = \frac{1}{4}m^3 \quad g)V = 0,02mm^3 \quad h)V = 48\pi m^3$

Übungsaufgabe 21. *Gegeben ist die Oberfläche O einer Kugel. Berechne den Radius r der Kugel.*

$a)u = 12cm^2 \quad b)u = 4mm^2 \quad c)u = 1km^2 \quad d)u = 2,4dm^2$

$e)u = 0,94m^2 \quad f)u = \frac{1}{4}m^2 \quad g)u = 0,02mm^2 \quad h)u = 100\pi m^2$

6 Quadratische Gleichungen

Definition. *Eine Gleichung, in der eine unbekannte Größe (meistens x) mit dem Exponenten 2, also als x^2, aber mit keinem höheren Exponenten vorkommt, heißt quadratische Gleichung*

Aufgabe 23. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^2 = 0$, z.B. $1,5x^2 = 0$?*

$$1,5x^2 = 0 \qquad |: 1,5 \tag{74}$$
$$x^2 = 0 \qquad |\sqrt{} \tag{75}$$
$$x = 0 \tag{76}$$

Verständnis. *Man kann die Lösung x=0 direkt sehen, denn nur 0^2 ergibt wieder 0. Man spricht hier auch von einer doppelten Nullstelle, die Parabel ax^2 berührt die x-Achse im Ursprung $(0 \mid 0)$*

Aufgabe 24. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^2 + c = 0$, z.B. $-1,5x^2 + 9 = 0$?*

$$-1,5x^2 + 9 = 0 \qquad | -9 \tag{77}$$
$$-1,5x^2 = -9 \qquad |: (-1,5) \tag{78}$$
$$x^2 = 6 \qquad |\sqrt{} \tag{79}$$

An dieser Stelle unterscheidet sich das Vorgehen von dem vorherigen wie beim Satz des Pythagoras, Kreis- oder Kugelaufgaben. Es gibt hier zwei Wurzeln, die die Gleichung erfüllen. Wir müssen beide Lösungen hinschreiben: Das Zeichen v zwischen den x bedeutet "oder".

$$x = \sqrt{6} \quad \vee \quad x = -\sqrt{6}$$

Schließlich berechnen wir die Wurzeln mit dem Taschenrechner und runden auf zwei Nachkommastellen:

$$x = 2,45 \quad \vee \quad x = 2,45$$

Aufgabe 25. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^2 + c = 0$, z.B. $1,5x^2 + 4 = 0$, wenn am Ende rechts eine negative Zahl steht?*

$$-1,5x^2 + 9 = 0 \qquad | -9 \tag{80}$$
$$1,5x^2 = -9 \qquad |: 1,5 \tag{81}$$
$$x^2 = -6 \tag{82}$$

An dieser Stelle müssen wir feststellen, dass es keine Lösung gibt. Dazu schreiben wir rechts unter x^2 folgendes:

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0} = -6$$

Jetzt schreiben wir den Satz. Es gibt für die Gleichung keine Lösung.

Aufgabe 26. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^2+bx=0$, z.B. $-1,5x^2+4x=0$?*

Um diese Gleichung zu lösen müssen wir sie umschreiben. Dazu müssen wir x *ausklammern*. Danach müssen wir die Gleichung in zwei Gleichungen *aufteilen*. Nach dem Aufteilen rechnen wir rechts die Gleichung zu Ende.

$$
\begin{aligned}
-1,5x^2+4x &= 0 && |\,\textit{ausklammern} && (83)\\
x\cdot(-1,5x+4) &= 0 && |\,\textit{aufteilen} && (84)\\
x=0 \quad \vee \quad -1,5x+4 &= 0 && |-4 && (85)\\
-1,5x &= -4 && |:(-1,5) && (86)\\
x &= \frac{8}{3} && && (87)
\end{aligned}
$$

Die beiden Lösungen sind dann $x=0$ oder $x=\frac{8}{3}$

Verständnis. *Da die linke Seite aus einer Summe (oder Differnez) von zwei Termen in denen x vorkommt besteht ist x= 0 immer eine Lösung. Die obere Methode dient also dazu die zweite Lösung zu bekommen. Gleichungen dieser Art haben immer zwei Lösungen, die entsprechenden Parabeln gehen durch den Ursprung und ein weiteres Mal durch die x-Achse.*

Aufgabe 27. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^2+bx+c=0$, z.B. $-1,5x^2+4x-2,5=0$?*

Wir beschriften die Zahlen vor den x und nennen sie a, b und c:

$$\underbrace{-1,5}_{=a}x^2\underbrace{+4}_{=b}x\underbrace{-2,5}_{=c}=0$$

Also a = -1,5   b = 4   c = -2,5

Wir setzen diese drei in die bekannte Mitternachtsformel (lernen!) ein:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Negative Zahlen setzt man in Klammern ein:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1,5) \cdot (-2,5)}}{2 \cdot (-1,5)}$$

Jetzt rechnet man mit dem Taschenrechner den Term unter der Wurzel, Diskriminante D genannt aus. Man gibt ihn ohne Wurzel ein. Genauso rechnet man den Nenner aus:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{1}}{-3}$$

Ist die Diskriminante, hier 1, postiv, so gibt es zwei Lösungen. Diese rechnet man mit dem Taschenrechner, einmal mit plus, einmal mit minus.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = \frac{5}{3}$$

Aufgabe 28. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^2 + bx + c = 0$, z.B. $2x^2 + 4x + 3 = 0$, wenn die Diskriminante unter der Wurzel negativ ist?*

Wir beschriften die Zahlen vor den x und nennen sie a, b und c:

$$\underbrace{2}_{=a} x^2 \underbrace{+4}_{=b} x \underbrace{3}_{=c} = 0$$

Also a = 2 b = 4 c = 3

Wir setzen diese drei in die bekannte Mitternachtsformel (lernen!) ein:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Negative Zahlen setzt man in Klammern ein:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

Jetzt rechnet man mit dem Taschenrechner den Term unter der Wurzel, Diskriminante D genannt aus. Man gibt ihn ohne Wurzel ein. Genauso rechnet man den Nenner aus:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{4}$$

Da die Diskriminate, hier -8, negativ ist, hat die Gleichung keine Lösung.

Aufgabe 29. *Wie löse ich eine kompexe quadratische Gleichung, die auf beiden Seiten Terme hat, z.B.* $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3 = -3x^2 + 3x - 1,5$ *?*

Wir bringen alles auf die linke Seite mittels Äquivalenzumformung und schreiben die gleichen Potenzen zusammen:

$$\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3 = -3x^2 + 3x + 1,5 \mid +3x^2 \quad -3x \quad -1,5$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x^2 + 4x + 3x + 3 - 1,5 = 0$$

Jetzt fassen wir die x^2, die x und die Zahlen (mit dem Taschenrechner, falls nötig) zusammen:

$$4,5x^2 + 7x + 1,5 = 0$$

Man bekommt eine der oberen Gleichungen. In diesem Fall verwendet man die Mitternachtsformel mit a = 4,5 b = 7 und c = 1,5.

Wenn man a, b, c einsetzt ergibt das:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 4,5 \cdot 1,5}}{2 \cdot 4,5}$$

Diskriminante und Nenner mit Taschenrechner ausrechnen:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{22}}{9}$$

Da die Diskriminante, hier 22, postiv ist gibt es zwei Lösungen der Gleichung:

$$x_1 = -0,26$$

$$x_2 = -1,30$$

Übungsaufgabe 22. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^2 = 0$ *b)* $2,2x^2 = 0$ *c)* $x^2 = 0$ *d)* $\frac{1}{4}x^2 = 0$ *e)* $(x-4)^2 = 0$

f) $\frac{1}{4}(x+2)^2 = 0$ *g)* $-3x^2 + 2 = 2$ *h)* $(3x-6)^2 = 0$ *i)* $\frac{x^2}{4} = 0$

Übungsaufgabe 23. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^2 + 3 = 0$ *b)* $-2,2x^2 - 4,4 = 0$ *c)* $x^2 + 1 = 0$ *d)* $(x-4)^2 + 4 = 0$

e) $-\frac{1}{4}(x+2)^2 - 3 = 0$ *f)* $-3x^2 + 2 = 3$ *g)* $(3x-6)^2 = -3$ *h)* $\frac{x^2}{-4} - 1 = 0$

Übungsaufgabe 24. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^2 - 3 = 0$ *b)* $-2,2x^2 + 4,4 = 0$ *c)* $x^2 - 1 = 0$ *d)* $(x-4)^2 - 4 = 0$

e) $\frac{1}{4}(x+2)^2 - 3 = 0$ *f)* $-3x^2 + 2 = 1$ *g)* $(3x-6)^2 = 3$ *h)* $\frac{x^2}{4} - 1 = 0$

Übungsaufgabe 25. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^2 + 3x = 0$ *b)* $-2,2x^2 - 4,4x = 0$ *c)* $x^2 + x = 0$ *d)* $x^2 + 4x = 0$

e) $-\frac{1}{4}x^2 - 3x = 0$ *f)* $-3x^2 + 2 = x + 2$ *g)* $(3x)^2 = -3x$ *h)* $\frac{x^2}{-4} - x = 0$

Übungsaufgabe 26. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^2 + 3x - 30 = 0$ *b)* $-2,2x^2 - 4,4x + 3,3 = 0$ *c)* $x^2 + x - 3 = 0$

d) $x^2 + 4x + 4 = 0$ *e)* $-\frac{1}{4}x^2 - 3x - 12 = 0$ *f)* $-3x^2 + 2x - 8 = 0$

g) $(3x)^2 - 3x + 10 = 0$ *h)* $\frac{x^2}{4} - x + 2 = 0$ *i)* $3(x^2 - 8x + 12) = 0$

Übungsaufgabe 27. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^2 + 3x - 30 = 9x^2 - 3x + 20$ *b)* $-2,2x^2 - 4,4x + 3,3 = x + 3$

c) $x^2 + x - 3 = 4x^2 - x - 4$ *d)* $x^2 + 4x + 4 = -x^2 - 2x + 12$

e) $-\frac{1}{4}x^2 - 3x - 12 = x^2 - 3x + 1$ *f)* $-3x^2 + 2x - 8 = -3x^2 + 5x - 3$

7 Gleichungen 3ten und 4ten Grades

Definition. *Eine Gleichung, in der eine unbekannte Größe (meistens x) mit dem Exponenten 3, also als x^3, aber mit keinem höheren Exponenten vorkommt, heißt Gleichung dritten Grades. Entsprechend definiert man Gleichungen 4ten und höheren Grades.*

Aufgabe 30. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^3 = 0$, z.B. $-1,2x^3 = 0$?*

$$-1,2x^3 = 0 \qquad |: (-1,2) \tag{88}$$

$$x^3 = 0 \qquad | \sqrt[3]{} \tag{89}$$

$$x = 0 \tag{90}$$

Verständnis. *Man kann die Lösung x=0 direkt sehen, denn nur 0^3 ergibt wieder 0. Man spricht hier auch von einer dreifachen Nullstelle, der Graph von ax^3 schneidet die x-Achse im Ursprung $(0 \mid 0)$ in einem Sattelpunkt*

Aufgabe 31. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^3 + d = 0$, z.B. $1,2x^3 + 4,8 = 0$?*

$$1,2x^3 + 4,8 = 0 \qquad | -4,8 \tag{91}$$

$$1,2x^3 = -4,8 \qquad |: 1,2 \tag{92}$$

$$x^3 = -4 \qquad | \sqrt[3]{} \tag{93}$$

$$x = -1,59 \tag{94}$$

Die dritte Wurzel läßt sich immer ziehen, die dritte Wurzel aus einer negativen Zahl ist negativ, die aus einer postiven Zahl positiv, es gibt für diese Gleichungen immer genau eine Lösung, die man mit dem Taschenrechner berechnet.

Aufgabe 32. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^3+cx = 0$, z.B. $2x^3-6x = 0$?*

$$2x^3 - 6x = 0 \qquad | \; x \; ausklammern \tag{95}$$

$$x \cdot (2x^2 - 6) = 0 \qquad | \; aufteilen \tag{96}$$

$$x = 0 \vee 2x^2 - 6 = 0 \qquad | +6 \tag{97}$$

$$2x^2 = 6 \qquad |: 2 \tag{98}$$

$$x^2 = 3 \qquad | \sqrt{} \tag{99}$$

$$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \tag{100}$$

Die drei Lösungen sind dann $x = 0; x = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3}$

Aufgabe 33. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^3 + bx^2 = 0$, z.B. $2x^3 - 6x^2 = 0$?*

$$
\begin{aligned}
2x^3 - 6x^2 &= 0 && \mid x^2 \; ausklammern && (101)\\
x^2 \cdot (2x - 6) &= 0 && \mid aufteilen && (102)\\
x^2 = 0 \vee 2x - 6 &= 0 && \mid +6 && (103)\\
x = 0 \vee 2x &= 6 && \mid: 2 && (104)\\
x &= 3 && && (105)
\end{aligned}
$$

Die beiden Lösungen sind dann $x = 0; x = 3$, die erste Lösung ist eine doppelte Nullstelle.

Aufgabe 34. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^3 + bx^2 + cx = 0$, z.B. $2x^3 - 6x^2 + 4x = 0$?*

$$
\begin{aligned}
2x^3 - 6x^2 + 4x &= 0 && \mid x \; ausklammern && (106)\\
x \cdot (2x^2 - 6x + 4) &= 0 && \mid aufteilen && (107)\\
x = 0 \vee 2x^2 - 6x + 4 &= 0 && && (108)\\
& && && (109)
\end{aligned}
$$

Zur Lösung der rechten Gleichung verwendet man die Mitternachtsformel mit a = 2; b=-6; c =4

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}$$

Ergibt $x_1 = 2; x_2 = 1$ macht insgesamt drei Lösungen.

Aufgabe 35. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^4 = 0$, z.B. $1,5x^4 = 0$?*

$$
\begin{aligned}
&1,5x^4 = 0 && \mid: 1,5 && (110)\\
&x^4 = 0 && \mid \sqrt[4]{} && (111)\\
&x = 0 && && (112)
\end{aligned}
$$

Verständnis. *Man kann die Lösung x=0 direkt sehen, denn nur 0^4 ergibt wieder 0. Man spricht hier auch von einer vierfachen Nullstelle, der Graph von ax^4 berührt die x-Achse im Ursprung* $(0 \mid 0)$

Aufgabe 36. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^4 + e = 0$, z.B. $-1,5x^4 + 36 = 0$?*

$$-1,5x^4 + 36 = 0 \qquad | -36 \tag{113}$$
$$-1,5x^4 = -36 \qquad |: (-1,5) \tag{114}$$
$$x^4 = 24 \qquad |\sqrt{} \tag{115}$$

Es gibt hier zwei vierte Wurzeln, die die Gleichung erfüllen.

$$x = \sqrt[4]{24} \quad \vee \quad x = -\sqrt[4]{24}$$

Schließlich berechnen wir die vierten Wurzeln mit dem Taschenrechner und runden auf zwei Nachkommastellen:

$$x = 2,21 \quad \vee \quad x = -2,21$$

Aufgabe 37. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ* $ax^4 + e = 0$*, z.B.* $1,5x^4 + 6 = 0$*, wenn am Ende rechts eine negative Zahl steht?*

$$-1,5x^4 + 6 = 0 \qquad | -6 \tag{116}$$
$$1,5x^4 = -6 \qquad |: 1,5 \tag{117}$$
$$x^4 = -4 \tag{118}$$

An dieser Stelle müssen wir feststellen, dass es keine Lösung gibt. Dazu schreiben wir rechts unter x^4 folgendes:

$$\underbrace{x^4}_{\geq 0} = -4$$

Es gibt für die Gleichung keine Lösung.

Aufgabe 38. *Wie löse ich folgende Gleichungen vierten Grades:*

$$4x^4 - 6x = 0 \tag{119}$$
$$-2x^4 + 6x^2 = 0 \tag{120}$$
$$\frac{1}{4}x^4 + x^3 = 0 \tag{121}$$
$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 = 0 \tag{122}$$

Bei allen vier Gleichungen muss die kleinste x-Potenz ausgeklammert werden:

$$x \cdot (4x^3 - 6) = 0 \tag{123}$$
$$x^2 \cdot (-2x^2 + 6) = 0 \tag{124}$$
$$x^3 \cdot (\frac{1}{4}x + 1) = 0 \tag{125}$$
$$x^2 \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0 \tag{126}$$

Dann werden die Gleichungen in zwei Gleichungen aufgeteilt. Eine Lösung ist immer x = 0, die weiteren Lösungen bekommt man indem man die rechten Gleichungen löst.

Aufgabe 39. *Wie löse ich Gleichungen der Form* $ax^4 + cx^2 + e = 0$ *z.B.* $x^4 - 0,5x^2 - 7,5 = 0$

iIch ersetze x^2 durch z, dass nennt sich z-Substitution. Dann ist $x^4 = (x^2)^2 = z^2$. Dazu schreibe ich folgende zwei Zeilen:

$$x^2 = z$$

$$x^4 = z^2$$

Jetzt ersetze ich in der oberen Gleichung die x durch z:

$$z^2 - 0,5z - 7,5 = 0$$

Dies rechnet man mit der Mitternachtsformel mit a = 1; b = -0,5; c = -7,5:

$$z_{1;2} = \frac{-(-0,5) \pm \sqrt{(-0,5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7,5)}}{2 \cdot 1}$$

Dies ergibt $z_1 = 3$ und $z_2 = -2,5$

Nun erstetzt man die z wieder durch x^2 (Resubstitution) un bekommt zwei Gleichungen

$$x^2 = 3 \qquad \underbrace{x^2}_{\geq 0} = -2,5$$

Die linke Gleichungen hat die beiden Lösungen $x = \sqrt{3}$ und $x = -\sqrt{3}$, die rechte Gleichung hat keine Lösung.

Aufgabe 40. *Wie löse ich Gleichungen mit Produkten von Faktoren z.B.* $\frac{1}{2}(x-2)^3 \cdot (3x-1) \cdot (x+7)^4 = 0$?

Es gilt hier der Nullproduktsatz: Ein Produkt mit mehreren Faktoren ist genau dann null, wenn einer der Faktoren null ist. Wir teilen die Gleichung daher in mehrere Gleichungen auf, den konstanten Faktor $\frac{1}{2}$ kann man weglassen.

$$\frac{1}{2}(x-2)^3 \cdot (3x-1) \cdot (x+7)^4 = 0$$
$$(x-2)^3 = 0 \ \vee \ 3x-1 = 0 \ \vee \ (x+7)^4 = 0$$

Die Nullstellen stecken nun in den Klammern:

$$x = 2 \ \vee \ 3x = 1 \ \vee \ x = -7$$

Wir rechnen zuende und notieren die Vielfachheit der Nullstellen:

$$x = 2 \ dreifach$$
$$x = \frac{1}{3} \ einfach$$
$$x = -7 \ vierfach$$

Übungsaufgabe 28. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^3 = 0$ *b)* $2,2x^4 = 0$ *c)* $x^3 = 0$ *d)* $\frac{1}{4}x^4 = 0$ *e)* $(x-4)^3 = 0$

f) $\frac{1}{4}(x+2)^4 = 0$ *g)* $-3x^3 + 2 = 2$ *h)* $(3x-6)^4 = 0$ *i)* $\frac{x^3}{4} = 0$

Übungsaufgabe 29. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^3 + 3 = 0$ *b)* $-2,2x^3 - 4,4 = 0$ *c)* $x^3 + 1 = 0$ *d)* $(x-4)^3 + 4 = 0$

e) $-\frac{1}{4}(x+2)^4 - 3 = 0$ *f)* $-3x^4 + 2 = 3$ *g)* $(3x-6)^4 = -3$ *h)* $\frac{x^4}{-4} - 1 = 0$

Übungsaufgabe 30. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^4 - 3 = 0$ *b)* $-2,2x^3 + 4,4 = 0$ *c)* $x^4 - 1 = 0$ *d)* $(x-4)^3 - 4 = 0$

e) $\frac{1}{4}(x+2)^3 - 3 = 0$ *f)* $-3x^4 + 2 = 1$ *g)* $(3x-6)^3 = 3$ *h)* $\frac{x^4}{4} - 1 = 0$

Übungsaufgabe 31. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^4 + 3x = 0$ *b)* $-2,2x^3 - 4,4x^2 = 0$ *c)* $x^4 + x = 0$ *d)* $x^4 + 4x^2 = 0$

e) $-\frac{1}{4}x^3 - 3x = 0$ *f)* $-3x^3 + 2 = x + 2$ *g)* $(3x)^3 = -3x$ *h)* $\frac{x^4}{-4} - x = 0$

Übungsaufgabe 32. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^3 + 3x^2 - 30x = 0$ *b)* $-2,2x^4 - 4,4x^3 + 3,3x^2 = 0$ *c)* $x^5 + x = 0$

d) $x^4 + 4x^3 + x^2 = 0$ *e)* $-\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 = 0$ *f)* $-3x^3 + 2x^2 + 2x = 0$

g) $(3x)^3 - 3x = 0$ *h)* $\frac{x^4}{4} - x = 0$ *i)* $3(x^4 - 8x^3) = 0$

Übungsaufgabe 33. *Löse die Gleichungen:*

a) $x^4 + 3x^2 - 30 = 0$ *b)* $-2,2x^4 - 4,4x^2 + 6,6 = 0$

c) $x^4 + x^2 + 15 = 0$ *d)* $x^4 + 4x^2 + 4 = 0$

Übungsaufgabe 34. *Löse die Gleichungen:*

a) $4(x+3)^2 \cdot (x-30)^3 = 0$ *b)* $-2,2x^3 \cdot (x-4)^4 \cdot (x+6,6) = 0$

c) $0,1x \cdot (6x+2)^2 = 0$ *d)* $(x+4)^5 \cdot (2+4x)^2 = 0$ *e)* $(9-x^2)^2 = 0$

8 Die Ableitung

Aufgabe 41. *Wie bestimme ich die erste Ableitung der Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x + 7$$

Ich leite jeden Summanden einzeln ab, indem ich den Exponenten von x um eins verkleinere, und diesen nach vorne hereinmultipliziere. Dabei wird x alleine zu 1 abgeleitet und Konstanten werden zu null abgeleitet und verschwinden:

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{4}x^3 - 3 \cdot 2x^2 - 2 \cdot x^1 - 6$$

Ergibt ausgerechnet

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 - 2x - 6$$

Am Besten man lernt diese kleine Tabelle für das Ableiten auswendig:

f	5	7x	x^2	x^3	x^4	x^{104}	x^n
f'	0	7	2x	$3x^2$	$4x^3$	$104x^{103}$	nx^{n-1}

Aufgabe 42. *Wie leite ich Funktionsterme mit konstanten Faktoren vor einer Klammer ab, z.B,* $f(x) = -0.7(x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$ *?*

Man lässt die konstanten Faktoren stehen und leitet nur den Term in der Klammer ab:

$$f(x) = -0.7(x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$$
$$f'(x) = -0,7(3x^2 - 4x + 5)$$

Aufgabe 43. *Wie leite ich Produkte ab?*

Man verwendet dazu die Produktregel. In der Merkhilfe findet sich die Regel auf Seite drei:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

.

Dazu merkt man sich die Faustregel "Ableiten mal Stehenlassen plus Stehenlassen mal Ableiten".

Nehmen wir z.B. $f(x) = 3x^2 \cdot (3x - 6)$. Der linke Faktor ist $3x^2$, der rechte (3x-6). Damit ist die Ableitung

$$f'(x) = 6x \cdot (3x - 6) + 3x^2 \cdot 3$$

Diese kann man dann noch zusammenfassen, indem man die Klammer ausrechnet.

$$f'(x) = 18x^2 - 36x + 9x^2 = 27x^2 - 36x$$

Aufgabe 44. *Wie berechne ich die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel, z.B. für* $f(x) = \frac{1}{4}(3x-2)^2$*?*

Man unterscheidet hier die innere Funktion 3x -2 und die äußere Funktion $\frac{1}{4}(\ )^2$

Die äußere Funktion wird abgeleitet, und dabei die innere Funktion stehengelassen, dann wird die innere Funktion abgeleitet und multipliziert, das nennt sich "nachdifferenzieren".

$$f'(x) = \underbrace{2 \cdot \frac{1}{4}(3x-2)}_{außere Ableitung} \cdot \underbrace{3}_{innere Ableitung}$$

Übungsaufgabe 35. *Bilde die erste und die zweite Ableitung*

a) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ *b)* $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 104$

c) $f(x) = 0,1x^5 - 0,25x^3 - x^2 + 1$ *d)* $f(x) = x^8 - 8x^2 - 64$ *e)* $g(x) = 6x^2 - 3x + 3$

f) $f(x) = 6 - x^2$ *g)* $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{8}$ *h)* $\pi x^2 - 3\pi x + 4\pi$

i) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *j)* $f(x) = (3-a)x^2 + ax - a^2$ *k)* $f(t) = -2t^2 + 6t$

Übungsaufgabe 36. *Bilde die erste und die zweite Ableitung*

a) $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x^2 + x + 1)$ *b)* $f(x) = \frac{1}{4}(x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x)$

c) $f(x) = 0,1(x^5 - 2,5x^3 - 10x^2 + 10)$ *d)* $f(x) = 8(x^4 - 8x^2 - 64)$

e) $g(x) = 6(x^2 - 3x + 3)$ *f)* $f(x) = \frac{2}{3}(6 - x^2)$ *g)* $f(x) = \frac{1}{4}(-\frac{x}{2} + \frac{1}{8})$

h) $f(x) = \pi(x^2 - 3x + 4)$ *i)* $f(x) = a(x^3 + x^2 + x + 1)$

j) $f(x) = (3-a)x^2 + a(x-a)$ *k)* $f(t) = \frac{1}{N}(-2t^2 + t)$

Übungsaufgabe 37. *Bestimmen Sie die erste Ableitung mit Hilfe der Kettenregel*

a) $f(x) = \frac{3}{4}(2x-1)^2$ *b)* $f(x) = (6x-1)^4$ *c)* $f(x) = 2(x^2 - 2x + 3)^2$

d) $f(x) = -0,2(2 - x^2)^2$ *e)* $f(x) = \frac{1}{4}(x+5)^4$ *f)* $g(t) = 0,4(t^3 - 3t)^2$

g) $f(x) = sin(x^2)$ *h)* $f(x) = (sinx)^2$ *i)* $f(x) = 2sin(\pi x)$

j) $f(x) = cos(0,5x - \pi)$ *k)* $f(x) = 0,5(1 - cosx)^2$ *l)* $g(x) = -sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2})$

Übungsaufgabe 38. *Bestimmen Sie die erste Ableitung mit Hilfe der Produktregel:*

a) $f(x) = (x+1)(x-1)$ *b)* $f(x) = x^2(3x-1)$ *c)* $f(x) = \frac{1}{2}x^3(6-x)$

d) $f(x) = (1+x^2)(1-x^2)$ *e)* $f(x) = x^2 \cdot sin(x)$ *f)* $f(x) = -x \cdot cos(\pi x)$

9 Die Monotonietabelle

Wenn man bei einer Funktion wissen möchte wie ihr Graph verläuft kann man das am besten, indem man beschreibt wie der Graph steigt und fällt. Man beschreibt von links nach rechts, also zum Beispiel: der Graph steigt bis zum Punkt Hop (2 | 5) und fällt dann wieder bis zum Punkt Tip (7 | -2). Schließlich steigt der Grpah bis ins Unendliche. Um das Steigungsverhalten und die Extrempunkte zu bestimmen verwednet man das Instrument einer Monotonietabelle.

Aufgabe 45. *Wie bestimme ich eine vollständige Monotonietabelle bei einer Funktion* $f(x) = x^3 - 6x$ *?*

Diese Aufgabe ist etwas länger. Hier sind die Schritte:

1. f wird abgeleitet. $f'(x) = 3x^2 - 6$.

2. f'(x) wird Null gesetzt. Dazu immer erst hinschreiben:f'(x) = 0 dann die Gleichung lösen:

$$3x^2 - 6 = 0 \;\; | +6$$

$$3x^2 = 6 \;\; |: 3$$

$$x^2 = 2 \;\; | \sqrt{}$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

3. Die Nullstellen werden in die Monotonietabelle eingetragen. Dafür werden hier zwei Spalten geschaffen. Die Tabelle wird dann beschriftet. Das sieht dann so aus:

		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
f'					
f					

.

Jetzt werden die Intervalle eingetragen:

	$]-\infty;-\sqrt{2}[$	$-\sqrt{2}$	$]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$	$\sqrt{2}$	$]\sqrt{2};\infty[$
f'					
f					

.

4. Man berechnet jetzt Steigungswerte indem man x-Werte aus den Intervallen in die erste Ableitung einsetzt. Diese Rechnung trägt man unterhalb der Tabelle ein.

	$]-\infty;-\sqrt{2}[$	$-\sqrt{2}$	$]-\sqrt{6};\sqrt{2}[$	$\sqrt{2}$	$]\sqrt{2};\infty[$
f'					
f					
	f'(-3) = 21		f'(0) = -6		f'(3) = 21

5. Man überträgt die Vorzeichen der Steigunsgwerte in die Zeile f'

	$]-\infty;-\sqrt{6}[$	$-\sqrt{6}$	$]-\sqrt{6};\sqrt{6}[$	$\sqrt{6}$	$]\sqrt{6};\infty[$
f'	+		-		+
f					
	f'(-3) = 21		f'(0) = -6		f'(3) = 21

6. In der Zeile darunter zeichnet man Pfeile die das Steigungsverhalten zeigen:

	$]-\infty;-\sqrt{6}[$	$-\sqrt{6}$	$]-\sqrt{6};\sqrt{6}[$	$\sqrt{6}$	$]\sqrt{6};\infty[$
f'	+		-		+
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
	f'(-3) = 21		f'(0) = -6		f'(3) = 21

7. Schließlich trägt man in den beiden Spalten mit den Nullstellen in der Zeile f die Hoch-, Tief oder Terrassenpunkte ein mit dem entsprechenden x-Werten.

	$]-\infty;-\sqrt{2}[$	$-\sqrt{2}$	$]-\sqrt{6};\sqrt{6}[$	$\sqrt{2}$	$]\sqrt{2};\infty[$
f'	+		-		+
f	$\nearrow$	Hop($-\sqrt{2}$ |)	$\searrow$	Tip($\sqrt{2}$ |)	$\nearrow$
	f'(-3) = 21		f'(0) = -6		f'(3) = 21

8. Zuletzt berechnet man die y-Werte der Extrempunkte, indem man die x-Werte in die Ausgangsfunktion f einsetzt.

$$f(-\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}$$
$$f((\sqrt{6}) = -4\sqrt{6}$$

Diese tragen wir dann noch in die Tabelle ein:

	$]-\infty; -\sqrt{2}[$	$-\sqrt{2}$	$]-\sqrt{6}; \sqrt{6}[$	$\sqrt{2}$	$]\sqrt{2}; \infty[$
f'	+		-		+
f	$\nearrow$ f'(-3) = 21	Hop$(-\sqrt{2} \mid 4\sqrt{6})$	$\searrow$ f'(0) = -6	Tip$(\sqrt{2} \mid -4\sqrt{6})$	$\nearrow$ f'(3) = 21

Fertig!

9.1 Aufgaben zur Monotonietabelle

Übungsaufgabe 39. *Erstelle eine vollständige Monotonietabelle und bestimme so Art und Lage der lokalen Extrempunkte.*

a) $f(x) = 0,25x^4 + 0,1x^3$ *b)* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$

c) $f(x) = 0,1x^5 - 8x + 2$ *d)* $f(x) = x^8$ *e)* $g(x) = 6x^2 - 3x + 3$

f) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x$ *g)* $f(x) = 0,1(6x - 42)^3$ *h)* $f(x) = 2(x^2 - 2x + 3)^2$

10 Die Tangente

Aufgabe 46. *Wie bestimme ich die Tangente g an den Punkt P(2 | f(2)) an die Funktion* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$*?*

Diese Aufgabe erfordert folgende Schritte:
1. Wir setzen den x-Wert in die Funktion f ein und erhalten den y - Wert:

$$y = f(2) = \frac{1}{3}2^3 - 2 \cdot 2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

2. Wir leiten f ab: $f'(x) = x^2 - 2$

3. Wir setzen den x-Wert in die Ableitung ein und erhalten den m-Wert, die Tangentensteigung.:

$$m = f'(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

4. Wir setzen x, y und m in die Geradengleichung y = mx+ t ein uns bestimmen so den t-Wert:

$$-\frac{4}{3} = 2 \cdot 2 + t \quad | -4$$

$$-5\frac{1}{3} = t$$

5. Wir schreiben die Tangentengleichung hin:

$$g : y = 2x - 5\frac{1}{3}$$

10.1 Aufgaben zur Tangente

Übungsaufgabe 40. *Bestimme die Gleichung der Tangente an f im Punkt P.*

a) $f(x) = 0,25x^4 + 0,1x^3 + 2x; P(2 \mid f(2))$

b) $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4; P(1 \mid f(1))$

c) $f(x) = 0,1x^5 - 6x + 2; P(-2 \mid f(-2)$

d) $f(x) = x^8; P(0,5 \mid f(0,5))$

e) $g(x) = 6x^2 - 3x + 3; P(-4 \mid f(-4))$

f) $f(x) = 0,1(6x - 42)^3; P(0 \mid f(0)$

h) $f(x) = 2(x^2 - 2x + 3)^2; P(1 \mid f(1)$

i) $f(x) = x^2 - 6x; P(a \mid f(a))$

11 Gebrochen rationale Funktionen

Definition. *Funktionen, bei denen ganzrationale Funktionsterme auch im Nenner stehen nennt man gebrochen-rationale Funktionen.*

Aufgabe 47. *Wie bestimme ich die Definitionslücken und damit die Polstellen, senkrechten Asymtoten und den maximalen Definitionsbereich einer gebrochen-rationalen Funktion* $f(x) = -2x + 3 - \frac{x}{x^2-7}$ *?*

Definitionslücken sind die Nullstellen des Nenners: Diesen muss man also Null setzen.

$$x^2 - 7 = 0 \mid +7$$
$$x^2 = 7 \mid \sqrt{}$$
$$x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$$

In der Regel sind dies die Polstellen und (zeichnerisch) die senkrechten Asymptoten. Das schreibt man deshalb immer dazu. Die maximale Definitionsmenge erhält man nun, indem man aus allen reellen Zahlen die Lücken herausnimmt:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$$

Aufgabe 48. *Wie gebe ich bei gebrochen-rationalen Funktionen mit einem echten Bruchterm (Nennergrad größer Zählergrad) die EINE schiefe oder waagrechte Asymptote an?*
a) $f(x) = -2x + 3 - \frac{x}{x^2-7}$
b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$
c) $f(x) = 2 + \frac{2}{x^2-6}$
d) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-6x}$

Diese EINE Asymptote findet sich vor dem Bruch, man schreibt sie als Geradengleichung mit y = auf, wenn nichts vor dem Bruch steht nimmt man null:
a) $y = -2x + 3$
b) $y = x$
c) $y = 2$
d) $y = 0$

Wenn in der Geradengleichung ein x vorkommt, spricht man von einer schiefen Asymptote, sonst von einer waagrechten Asymptote. Dies vermerkt man hinter der Gleichung

a) $y = -2x + 3$ schiefe Asymptote
b) $y = x$ schiefe Asymptote
c) $y = 2$ waagrechte Asymptote
d) $y = 0$ waagrechte Asymptote, die x-Achse

Aufgabe 49. *Wie bestimme ich die Art der Polstelle (erser Art, zweiter Art, etc.) bei einer gebrochen rationaeln Funktion?*
a) $f(x) = -2x + 3 - \frac{x}{x^2-7}$
b) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$
c) $f(x) = 2 + \frac{2}{x^2-6}$
d) $f(x) = \frac{2-x}{(x-6)^2}$
e) $f(x) = 3 - \frac{2-x}{(x-1)^3}$
f) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-6}$

Im Falle c), Nenner ist x^2 und d) Nenner ist $(x-6)^2$ liegen doppelte Nullstellen vor. Wir berechnen die Definitionslücken:

$$c)\ x^2 = 0 \mid \sqrt{} \qquad d)\ (x-6)^2 = 0 \mid \sqrt{}$$

$$c)\ x = 0 \text{ doppelt} \qquad d)\ x - 6 = 0 \mid +6$$

$$d)\ x = 6 \text{ doppelt}$$

In diesen Fällen liegt bei x= 0 bzw. x = 6 eine Polstelle 2ter Ordnung ohne Vorzeichenwechsel vor. Der Definitionsbereich ist dann entsprechend:

$$c)\ D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad d)\ D_f = \mathbb{R} \setminus \{6\}$$

Im Fall e) liegt eine dreifache Nullstelle im Nenner vor, dies ergibt eine Polstelle dritter Ordnung mit Vorzeichenwechsel (VZW), alle anderen Nullstellen a), b), f) ergebn Polstelen erster Ordnung mit Vorzeichenwechsel am Pol.

Aufgabe 50. *Wie bestimme ich den Limes an der Polstelle* $f(x) = -0,5x + 1 - \frac{2}{x-7}$ **?*

Zunächst muss man üben den Limes korrekt aufzuschreiben. Die Polstelle ist bei x= 7. Dann schreibt man den Grenzwert von links so hin:

$$\lim_{x \to 7^-} -0,5x + 1 - \frac{2}{x-7}$$

Jetzt wird die 7 für x eingesetzt, unter dem Bruch ergibt sich 0^-, weil man sich von links nähert, mit einer Zahl die kleiner als 7 ist: Alle Rechnungen setzt man unter den Limes mit Bleistift:

$$\lim_{x \to 7^-} \underbrace{-0,5x + 1}_{-2,5} - \underbrace{\frac{2}{x-7}}_{\frac{2}{0^-}}$$

$\frac{2}{0^-}$ *ergibt* $-\infty$, wegen des doppelten Minuszeichens ergibt der ganze Limes $+\infty$:

$$\lim_{x\to 7^-} \underbrace{-0,5x+1}_{-2,5} - \underbrace{\frac{2}{x-7}}_{\frac{2}{0^-}} = +\infty$$

Beim rechten Limes ergibt sich:

$$\lim_{x\to 7^+} \underbrace{-0,5x+1}_{-2,5} - \underbrace{\frac{2}{x-7}}_{\frac{2}{0^+}} = -\infty$$

Der Limes erfordert viel Verständnis und Übung, aber es gibt andere Arten ihn zu bestimmen, zum Beispiel zeichnerisch, oder mit Hilfe der Monotonietabelle.

Aufgabe 51. *Wie leite ich einen Bruchterm $f(x) = \frac{x-4}{3x-2}$ ab?*

Dies geschieht mit Hilfe der Quotientenregel. In der Merkhilfe auf Seite 3 findet man diese:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Man merkt sich dazu folgende Faustregel: "Ableiten mal Stehenlassen minus Stehenlassen mal Ableiten". Der Nenner muss nur wieder hingeschrieben werden und dann mit Klammer und Quadrat versehen werden. Damit ergibt sich für die Funktion f:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(3x-2) - (x-4)\cdot 3}{(3x-2)^2}$$

Der Zähler wird dann soweit wie möglich vereinfacht, dazu werden hier erst die Klammern ausgerechnet:

$$f'(x) = \frac{3x-2-(3x-12)}{(3x-2)^2} = \frac{3x-2-3x+12}{(3x-2)^2} = \frac{10}{(3x-2)^2}$$

Aufgabe 52. *Wie leite ich einen Bruchterm $f(x) = \frac{x-4}{(3x-2)^2}$ ab, wenn im Nenner außen ein Quadrat steht?*

Die Ableitung geschieht mit der Quotientenregel, aber bei der Ableitung des Nenners verwendet man die Kettenregel. Im Nenner ergibt das doppelte Quadrat hoch 4:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(3x-2)^2 - (x-4)\cdot 2\cdot(3x-2)\cdot 3}{(3x-2)^4}$$

Nun befindet sich der Term (3x-2) dreimal in dem Funktionsterm. Nach der Regel "Klau immer eins" schreichen wir aus jedem einmal die (3x-2) heraus:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (3x-2)^{\cancel{2}} - (x-4) \cdot 2 \cdot (3x \cancel{-} 2) \cdot 3}{(3x-2)^{\cancel{4}3}}$$

Das vereinfacht den Term den man weiter vereinfacht:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (3x-2) - (x-4) \cdot 2 \cdot 3}{(3x-2)^3} = \frac{3x - 2 - (6x - 24)}{(3x-2)^3} = \frac{3x - 2 - 6x + 24}{(3x-2)^3} = \frac{-3x + 22}{(3x-2)^3}$$

11.1 Aufgaben zu gebrochen-rationalen Funktionen

Übungsaufgabe 41. *Bestimme die Definitionslücken und damit die Polstellen, senkrechten Asymtoten und den maximalen Definitionsbereich von f(x):*

a) $f(x) = -2x + 3 - \frac{x}{x^2-9}$ *b)* $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ *c)* $f(x) = 2 + \frac{2}{2x-6}$

d) $f(x) = \frac{2-x}{(x-6)^2}$ *e)* $f(x) = 3 - \frac{2-x}{(x-1)^3}$ *f)* $f(x) = \frac{2-x}{x^2-6}$

g) $f(x) = 3 + \frac{x}{x^3-7}$ *h)* $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{x^2-4x+3}$ *i)* $f(x) = 2x + \frac{2}{x^2-6x}$

j) $f(x) = x^3 - \frac{2-x}{(x-a)^2}$ *k)* $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}$ *l)* $f(x) = \frac{2-x}{x^2} + 4$

Übungsaufgabe 42. *Gib die EINE Asymptote von f an und notiere, ob sie schief oder waagrecht ist.*

a) $f(x) = -2x + 3 - \frac{x}{x^2-9}$ *b)* $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ *c)* $f(x) = 2 + \frac{2}{2x-6}$

d) $f(x) = \frac{2-x}{(x-6)^2}$ *e)* $f(x) = 3 - \frac{2-x}{(x-1)^3}$ *f)* $f(x) = \frac{2-x}{x^2-6}$

g) $f(x) = 3 + \frac{x}{x^3-7}$ *h)* $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{x^2-4x+3}$ *i)* $f(x) = 2x + 0,5 + \frac{2}{x^2-6x}$

j) $f(x) = \frac{1}{3}x + 2 + \frac{2-x}{(x-a)^2}$ *k)* $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}$ *l)* $f(x) = \frac{2-x}{x^2} + 4$

Übungsaufgabe 43. *Gib an, ob es sich bei den Polstellen um Polstellen erter, zweiter oder höherer Ordnung handelt.*

a) $f(x) = -2x + 3 - \frac{x}{(x-9)^2}$ *b)* $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ *c)* $f(x) = 2 + \frac{2}{(2x-6)^3}$

d) $f(x) = \frac{2-x}{x-6}$ *e)* $f(x) = 3 - \frac{2-x}{(x-1)^4}$ *f)* $f(x) = \frac{2-x}{x^2-16}$

g) $f(x) = 3 + \frac{x-2}{x^3}$ *h)* $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{x^2-4x+3}$ *i)* $f(x) = 2x + 0,5 + \frac{2}{x^2-6x}$

j) $f(x) = \frac{1}{3}x + 2 + \frac{2-x}{(x-a)^2}$ *k)* $f(x) = \frac{1}{3x} - \frac{2}{x+3}$ *l)* $f(x) = \frac{2-x}{x^4} + 4$

Übungsaufgabe 44. *Bestimme den Limes an der Polstelle:*

a) $f(x) = -2x + 3 - \frac{1}{x-2}$ *b)* $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2}$ *c)* $f(x) = 2 - \frac{2}{(x-6)^2}$

d) $f(x) = \frac{2-x}{x-3}$ *e)* $f(x) = 3 - \frac{2-x}{(x-1)^3}$ *f)* $f(x) = \frac{1}{x-4}$

12 Bruchgleichungen

13 Die e-Funktion

13.1 Übungen zur e-Funktion

Übungsaufgabe 45. *Bestimmen Sie die Nullstellen:*

a) $4e^x = 0$ *b)* $-2e^{3x} = 0$ *c)* $e^{-2x} + 12 = 0$ *d)* $-2e^{x+1} - 6 = 0$

e) $4e^x - 12 = 0$ *f)* $-2e^{3x} + 48 = 0$ *g)* $-e^{-2x} + 12 = 0$ *h)* $-2e^{x+1} + 1,6 = 0$

i) $4(e^x - 2)^2 = 0$ *j)* $-2e^{x^2} + 1 = 0$ *k)* $(e^{-2x} + 1)^2 = 0$ *l)* $-12e^{x^2+1} + 6 = 0$

Übungsaufgabe 46. *Leiten Sie zweimal ab:*

a) $f(x) = 4e^x$ *b)* $f(x) = -2e^{3x}$ *c)* $f(x) = e^{-2x} + 12$ *d)*$f(x) = -2e^{x+1} - 6$

e) $f(x) = 4e^x - 12$ *f)* $f(x) = -2e^{3x} + 48$ *g)* $f(x) = -e^{-2x} + 12$

h)$f(x) = -2e^{x+1} + 1,6$ *i)* $f(x) = 4(e^x - 2)^2$ *j)* $f(x) = -2e^{x^2} + 3$

k) $f(x) = (e^{-2x} + 1)^2$ *l)*$f(x) = -12e^{x^2+1} + 6$ *m)* $f(x) = (e^{-x} + 1)^3$

Übungsaufgabe 47. *Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse:*

a) $f(x) = 4e^x$ *b)* $f(x) = -2e^{3x}$ *c)* $f(x) = e^{-2x} + 12$ *d)*$f(x) = -2e^{x+1} - 6$

e) $f(x) = 4e^x - 12$ *f)* $f(x) = -2e^{3x} + 48$ *g)* $f(x) = -e^{-2x} + 12$

h)$f(x) = -2e^{x+1} + 1,6$ *i)* $f(x) = 4(e^x - 2)^2$ *j)* $f(x) = -2e^{x^2} + 3$

k) $f(x) = (e^{-2x} + 1)^2$ *l)*$f(x) = -12e^{x^2+1} + 6$ *m)* $f(x) = (e^{-x} + 1)^3$

Übungsaufgabe 48. *Bestimmen Sie die Nullstellen:*

a) $4xe^x = 0$ *b)* $-2e^{3x}(x - 3) = 0$ *c)* $e^{-2x}(4 - x) = 0$ *d)* $-2x^2e^{x+1} = 0$

e) $4e^x(x - 12) = 0$ *f)* $(-2 + x)e^{3x} = 0$ *g)* $-e^{-2x}(x^2 + 12) = 0$ *h)* $-2e^{x+1} = 0$

i) $4(e^x - 2)^2 = 0$ *j)* $-2e^{x^2}(\sqrt{x} + 1) = 0$ *k)* $(e^{-2x} + 1)^3 = 0$ *l)*$-12e^{x^2+1} sinx = 0$

Übungsaufgabe 49. *Leiten Sie einmal ab und klammern Sie dann den e-Term aus:*

a) $f(x) = 4xe^x$ *b)* $f(x) = -2e^{3x}(x-3)$ *c)* $f(x) = e^{-2x}(4-x)$

d)$f(x) = -2x^2e^{x+1}$ *e)* $f(x) = 4e^x(x-12)$ *f)* $f(x) = (-2+x)e^{3x}$

g) $f(x) = -e^{-2x}(x^2+12)$ *h)*$f(x) = -2e^{x+1}$ *i)* $f(x) = 4(e^x-2)^2$

j) $f(x) = -2e^{x^2}(\sqrt{x}+1)$ *k)* $f(x) = (e^{-2x}+1)^3$ *l)*$f(x) = -12e^x sinx = 0$

Übungsaufgabe 50. *Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse:*

a) $f(x) = 4xe^x$ *b)* $f(x) = -2e^{3x}(x-3)$ *c)* $f(x) = e^{-2x}(4-x)$

d)$f(x) = -2x^2e^{x+1}$ *e)* $f(x) = 4e^x(x-12)$ *f)* $f(x) = (-2+x)e^{3x}$

g) $f(x) = -e^{-2x}(x^2+12)$ *h)*$f(x) = -2e^{x+1}$ *i)* $f(x) = 4(e^x-2)^2$

j) $f(x) = -2e^{x^2}(\sqrt{x}+1)$ *k)* $f(x) = (e^{-2x}+1)^3$ *l)*$f(x) = -12e^x sinx = 0$

Übungsaufgabe 51. *Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der x-Achse, den Schnittpunkt mit der y-Achse und leiten Sie einmal ab:*

a) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ *b)* $f(x) = 2\frac{e^x}{e^x+1}$ *c)* $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}$ *d)*$f(x) = \frac{e^{-0,5x}}{x^2+1}$

Übungsaufgabe 52. *Bestimme* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *sowie* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

a) $f(x) = 4e^x$ *b)* $f(x) = -2e^{3x}$ *c)* $f(x) = e^{-2x}+12$ *d)*$f(x) = -2e^{x+1}-6$

e) $4e^x(x-12) = 0$ *f)* $(-2+x)e^{3x} = 0$ *g)* $-e^{-2x}(x^2+12) = 0$ *h)* $-2e^{x+1} = 0$

i) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ *j)* $f(x) = 2\frac{e^x}{e^x+1}$ *k)* $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}$ *l)*$f(x) = \frac{e^{-0,5x}}{x^2+1}$

Übungsaufgabe 53. *Fertige eine Monotonietabelle an und skizziere die Funktion:*

a) $f(x) = 20e^{0,2x}$ *(einfaches Wachstum)*

b) $f(x) = 12e^{-2x}$ *(einfacher Zerfall)*

c) $(x-1)\cdot e^x$ *d)*$f(x) = e^{0,2x}-3x$

e) $f(x) = \frac{1}{e^x+2}$ *f)* $f(x) = 2e^{1-x^2}$

Übungsaufgabe 54. *Bestimme die Tangente in* $P(1 \mid f(1))$ *bei den Funktionen aus der Aufgabe vorher. Zeichne die Tangenten in die Skizze ein.*

14 Quadratische Funktionen

die

15 Trigonometrie

16 Höhensatz

17 Wachstumsprozesse

18 Zerfallsprozesse

19 Gleichungssysteme

20 Strahlensätze

21 Baumdiagramm